第 59 卷　第 4 期
2023 年 7 月

南京大学学报(自然科学)
JOURNAL OF NANJING UNIVERSITY
(NATURAL SCIENCE)

Vol. 59, No. 4
July, 2023

DOI:10.13232/j.cnki.jnju.2023.04.010

知识点网络下的知识评估和学习路径选择

王大利[1,2],许晴媛[1,2*],李进金[3,4],朱泳帆[1,2]

(1.闽南师范大学计算机学院,漳州,363000;2.数据科学与智能应用福建省高校重点实验室,闽南师范大学,漳州,363000;3.闽南师范大学数学与统计学院,漳州,363000;4.福建省粒计算及其应用重点实验室,闽南师范大学,漳州,363000)

摘　要:学习者在认知过程中可能掌握了某些知识点,但自身的知识状态并未改变,因此,为了提高学习效率并对学习者进行知识评估,在知识点网络下运用形式概念分析方法讨论如何对学习者进行知识评估和学习路径选择问题.首先,给出了知识点网络的构造方法、有效知识点组合的概念及知识点网络下题库的构造方法;其次,通过知识点网络诱导知识点背景,在已知学习者知识状态的情况下对学习者掌握的知识点进行评估,并给出知识点网络下的学习路径图及其算法;最后,通过实验验证了提出的算法的有效性和可行性.研究发现,由知识点网络诱导的知识点背景确定的知识点结构满足良级性.

关键词:知识点网络,有效知识点组合,知识点背景,知识评估,学习路径

中图分类号:TP182　　　　**文献标志码**:A

Knowledge assessment and learning paths selection under knowledge-point network

Wang Dali[1,2], Xu Qingyuan[1,2*], Li Jinjin[3,4], Zhu Yongfan[1,2]

(1. School of Computer Science, Minnan Normal University, Zhangzhou, 363000, China; 2. Fujian Provincial University Key Laboratory of Data Science and Intelligent Application, Minnan Normal University, Zhangzhou, 363000, China; 3. School of Mathematics Sciences and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou, 363000, China; 4. Fujian Provincial Key Laboratory of Granular Computing and Its Application, Minnan Normal University, Zhangzhou, 363000, China)

Abstract: In the cognitive process, learners may master some knowledge points, but their own knowledge state does not change. Therefore, in order to improve the learning efficiency and assessment of the learners' knowledge, this paper discusses how to assess the learners' knowledge and select learning paths for learners by using formal concept analysis method under the knowledge-point network. Firstly, the construction method of knowledge-point network, the concept of valid knowledge-point combination and the construction method of question bank under the knowledge-point network are given. Secondly, the knowledge-point context is induced by the knowledge-point network. Furthermore, in circumstances known learners' knowledge state, the knowledge point mastered by learners are assessed and the learning paths diagram and its algorithm under the knowledge-point network are given. Finally, the effectiveness and feasibilities of the proposed algorithm are verified by experiments. This research finds that the knowledge-point structure determined by the knowledge-point context induced by the knowledge-point network satisfies the well-graded.

Key words: knowledge-point network, valid knowledge-point combination, knowledge-point context, knowledge assessment, learning paths

基金项目:国家自然科学基金(62076221),福建省自然科学基金(2022J01912)

收稿日期:2023－06－13

* 通讯联系人,E-mail:xqyyuan871@163.com

形式概念分析(Formal Concept Analysis, FCA)[1]是一种从形式背景进行数据分析及规则提取的有力工具[2],已经应用于许多领域[3-5]. 知识空间理论(Knowledge Space Theory,KST)[6-7]为教学指导和知识评估建立了一套数学框架[8-9],经过多年的发展,已广泛应用于自适应评估[9-12]. Rusch and Wille[13]将FCA和KST建立联系,提出知识空间和形式背景相互转换过程,其他学者还将KST和认知水平建立了联系,并将KST推广到基于能力的知识空间理论(Competence-Based Knowledge Space Theory,Cb-KST)[14-15].

Cb-KST从学习者对问题领域子集的反应来推断个体的能力水平,但在Cb-KST中,能力状态和知识状态不是一一对应的,即不能从学习者的知识状态得到对应的能力状态,使用Cb-KST为理论框架的辅导系统[16]对学习者进行评估学习,会使该问题变得更严重[17],因为能力水平的变化可能不会表现为知识水平的变化. 对此,Heller et al[18]提出合取模型,即学习者必须把解决问题$q\in Q$的所有知识点完全掌握,又在合取模型上对能力状态和知识状态一一对应的条件进行了讨论[19-21]. Stefanutti and de Chiusole[17]在合取模型上对能力结构满足良级性的条件进行了研究,即学习者只需掌握一个新的知识点,就能取得实实在在的进步,直至掌握所有的知识点.

近年来,知识点网络引起众多学者的关注. 谢深泉[22]分析了知识点和网络的特性,由知识点之间的内在联系构造知识点网络. 刘向等[23]从拓扑结构和演化机制两个方面综述了知识网络的理论研究进展. 为了指导自动化专业学习,提高学习者的学习效率,刘萌等[24]提出一种基于知识点网络的学习路径推荐方法. 何俊颖[25]将课程知识点构建为知识点网络,关注知识点之间的关系,特别是当前所学知识点紧前与紧后的知识,使基于知识点网络学习的在线学习者的学习效果更好. 但大多学者研究的是知识点网络中如何提高学习者的学习效率,对知识点网络中的知识评估鲜有关注,本文对此进行了讨论.

现代教育中,除了关注学习者已掌握了哪些知识点,更重要的是关注学习者下一步应该掌握的知识点[26]. 李金海等[27]为了实现学习者的阶段性认知,提出概念的渐进式认知. 周银凤等[28]讨论了良好技能函数,基于此得到的学习路径图可对学习者的下一步行动进行有效的指导.

基于此,本文利用知识点之间具有联系这一优势将其和知识空间理论相结合,不仅对学习者的下一步认知进行指导,还能得到有效学习路径,有效学习路径指学习者在学习路径中的每一步只需学习掌握一个知识点就能改变原有的知识状态.

综上,本文使用形式概念方法对学习者掌握的知识进行评估,给出方便学习者进行有效个性化学习的学习路径图,使其在个体评价结果的基础上选择适合自身的个性化学习路径. 首先,给出构造知识点网络的方法以便学习者进行有效且有序的学习,提高学习效率,同时提出有效知识点组合的概念,由知识点网络构造题库;其次,由知识点网络诱导知识点背景,并对学习者掌握的知识点进行评估,给出适合学习者个性化情况的学习路径图及其算法;最后,通过实验验证本文算法的可行性和有效性.

1 预备知识

本节主要回顾形式概念分析和知识空间理论的相关概念.

定义 1[1] 设(U,V,R)为一个形式背景,其中,$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为对象集;$V=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$为属性集;$R\subseteq U\otimes V$为U和V之间的二元关系. 若$(x,a)\in R$,则称x具有属性a;若$(x,a)\notin R$,则称x不具有属性a.

定义 2[1] 设(U,V,R)为形式背景,在$x\in U$和$a\in V$上定义运算:

$$x^*=\{a\,|\,a\in V,(x,a)\in R\}$$

$$a^*=\{x\,|\,x\in U,(x,a)\in R\}$$

其中,x^*表示对象x具有的属性集合,a^*表示只具有属性a的对象集合. 若对$\forall x\in U$,有$x^*\neq\varnothing$和$x^*\neq V$,若对$\forall a\in V$,有$a^*\neq\varnothing$和$a^*\neq U$,则称形式背景(U,V,R)是正则的.

在$X\subseteq U$和$B\subseteq V$上分别定义运算:

$$X^{\diamond}=\left\{a\in V \middle| a^{*}\cap X\neq\varnothing\right\}$$

$$B^{\square}=\left\{x\in U \middle| x^{*}\subseteq B\right\}$$

其中,$X^{\diamond}$表示X中的对象所具有的属性集合,$B^{\square}$表示只具有B中属性的对象集合.特别地,记$\{x\}^{\diamond}=x^{\diamond}$, $\{a\}^{\square}=a^{\square}$.

定义3[1] 设(U,V,R)为一个形式背景,对一个二元组(X,B),其中$X\subseteq U$,$B\subseteq V$,若满足$X^{\diamond}=B$,$B^{\square}=X$,则称(X,B)为面向属性概念.此时,称X为面向属性概念的外延,B为面向属性概念的内涵.

对于(X_1,B_1), $(X_2,B_2)\in L_p(U,V,R)$,定义:

$$(X_1,B_1)\leqslant(X_2,B_2)\Leftrightarrow X_1\subseteq X_2(B_1\subseteq B_2)$$

则"$\leqslant$"为$L_p(U,V,R)$上的偏序关系,$L_p(U,V,R)$为偏序集.

对于(X_1,B_1), $(X_2,B_2)\in L_p(U,V,R)$,定义:

$$(X_1,B_1)\wedge(X_2,B_2)=\left(X_1\cap X_2,(X_1\cap X_2)^{\diamond}\right)=\left(X_1\cap X_2,(B_1\cap B_2)^{\square\diamond}\right)$$

$$(X_1,B_1)\vee(X_2,B_2)=\left((B_1\cup B_2)^{\square},B_1\cup B_2\right)=\left((X_1\cup X_2)^{\diamond\square},B_1\cup B_2\right)$$

则$L_p(U,V,R,\vee,\wedge)$为完备格,称$L_p(U,V,R)$为形式背景(U,V,R)的面向属性概念格.

定义4[1] 设(X_1,A_1)和(X_2,A_2)为形式背景(U,V,R)的两个概念,若$(X_1,A_1)\leqslant(X_2,A_2)$,同时不存在概念$(X_3,A_3)$使得$(X_1,A_1)\neq(X_3,A_3)$, $(X_2,A_2)\neq(X_3,A_3)$ 且 $(X_1,A_1)\leqslant(X_3,A_3)\leqslant(X_2,A_2)$成立,则称$(X_1,A_1)$为$(X_2,A_2)$的下邻,称$(X_2,A_2)$为$(X_1,A_1)$的上邻,记为$(X_1,A_1)\prec(X_2,A_2)$.

定义5[7] 设Q为问题域,κ是由Q的一些子集构成的知识状态集族,并且κ至少包含了空集$\varnothing$和全集Q,则称(Q,κ)为知识结构(Knowledge Structure).记$\kappa=\left\{\varnothing,K_1,K_2,\cdots,Q\right\}$,其中$K_i\subseteq Q$ $(i=1,2,\cdots)$,当问题域Q给定时,可直接用κ表示知识结构.

定义6[7] 设$\mathcal{F}$为一个集族,对于$\forall K\in\mathcal{F}$, $L\in\mathcal{F}$,存在有限序列$K=K_0,K_1,\cdots,K_p=L$,使得K_{i-1}与K_i之间的距离:

$$d(K_{i-1},K_i)=\left|(K_{i-1}\backslash K_i)\cup(K_i\backslash K_{i-1})\right|=1$$

其中,$1\leqslant i\leqslant p$, $p=d(K,L)$,则称$\mathcal{F}$是良级的.

2 知识点网络与知识点背景

知识点网络将知识点连接为一个有机整体,起着维系领域知识库的作用[29],学生可以根据此网络对知识点进行有序且有效的学习.基于此,首先由教学专家标注知识点之间的关系,构造知识点网络以便学习者进行循序渐进的认知,提高学习效率;其次,由知识点网络提出有效知识点组合的概念并给出构造题库的方法;最后,由知识点网络诱导知识点背景并对学习者进行知识评估.

2.1 知识点网络 现实生活中,学习者学习并掌握了知识点,但测试结果不都是很理想,原因有很多,如学习者粗心大意、考试时心理状态不佳等.还有一个更重要的原因是学习者没有建立知识点之间的联系,即学习者掌握的知识点是零散的,没有建立联系的知识点让学习者记忆起来相当吃力.若将零散知识点按照知识点之间的联系串起来形成知识条目,学习者就可以循序渐进地学习,最终告别知识碎片化,提升学习效率.基于此,根据教学专家标注的知识点之间的关系构造知识点网络.学习者根据知识点网络学习并掌握的不再是相对独立的知识点,而是串起来的有递进关系或平行关系的知识条目,这样有利于学习者的高效学习和轻松记忆,最终形成知识体系.

用0−1有序列向量表示知识点组合,如$D=\left\{a,b,c,d,e,f\right\}$中的知识点组合$\left\{a,b,d,e,f\right\}$记为$(1,1,0,1,1,1)^T$.

定义7[30] 设D为知识领域,即构成某一领域基础知识的集合.用来描述某知识领域的完整单元称为知识点,在框架结构上相对独立且不可再分割为更小的知识点称为元知识点,由多个元知识点组合的知识点集合称为知识点组合.

定义8[22] 设a, b是两个知识点,若要学习知识点b必须先掌握知识点a,则称a到b具有约束关系,也称a是b的支撑者,b是a的被支撑者.约束关系按照支撑者到被支撑者的方向链接,记为"$\rightarrow$",简称SR关系.

知识点a到b的SR关系,如图1所示.

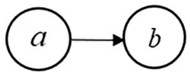

图 1　知识点 a 和 b 的 SR 关系

Fig. 1　The SR relation between knowledge point a and b

定义 9[22]　给定若干知识点,根据知识点之间的约束关系进行链接所形成的有向图称为知识点网络 T.

知识点网络是一个有向图,通常,两个知识点之间不会直接或间接相互支撑,由此,知识点网络中任意两个知识点之间都不会形成环路.本文仅讨论此类知识点网络.

定义 10　知识点网络中,任意两个知识点 a 和 b,若有 $a \to b$ 且不存在知识点 c,使得 $a \to c \to b$,则称 a 是 b 的前驱知识点,b 是 a 的后继知识点.$a \to b$ 中的知识点 a 和 b 称为直接相邻关系或直接先决条件,$a \to c \to \cdots \to b$ 中知识点 a 和 b 称为间接相邻关系或间接先决条件.

由某一知识领域 D 构建知识点网络的步骤:(1)教学专家对知识领域 D 中各知识点之间的约束关系(即 SR 关系)进行标注;(2)通过知识点之间的前驱关系和后继关系构建知识点网络.

例 1　给定某一知识领域 $D_1 = \{a, b, c, d\}$,其知识点网络 T_1 的构建如下:(1)教学专家标注的约束关系为 $a \to b, a \to c, c \to e, b \to d$;(2)由知识点之间的前驱关系和后继关系构建如图 2 所示的知识点网络 T_1.

图 2 所示的知识点网络 T_1 中,知识点 b 和 d 及 a 和 d 都为 SR 关系,其中,b 是 d 的前驱知识点,d 是 b 的后继知识点,但知识点 a 和 d 均不是彼此的前驱和后继知识点.同时,学习者通过知识点网络不仅能对知识点进行有序学习,还能将掌握的知识点形成知识体系,这样一来学习者就不会进行盲目学习,即根据图 2 的知识点网络 T_1 进行学习,学习者可以按照知识点 a, b, d 或者知识点 a, c, e 进行有序学习,这样的学习顺序遵循知识点之间的递进关系,学习起来就具有顺畅性,这种学习路径是推荐的.根据知识点网络进行学习不仅节约了学习者的时间和精力,而且能有效地达成学习目标.如果没有根据知识点网络进行学习,学习者可能先学习知识点 a,再学习知识点 d,某种程度上这种盲目学习会给初学者带来学习困惑,因为知识点 b 为知识点 a 和 d 的桥梁,没有按照递进或前后衔接关系对知识点进行学习,这样做学习者不仅很难达成学习目标,还浪费了大量的时间和精力.基于此,提高学习者的学习顺畅性,即如何得到满足知识点网络中知识点之间约束关系的知识点组合,成为一个需重点解决的问题.

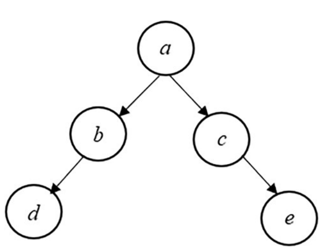

图 2　知识领域 D_1 构成的知识点网络 T_1

Fig. 2　The knowledge - point network T_1 formed by knowledge domain D_1

2.2　有效知识点组合及题库建设　由知识点网络提出有效知识点组合的概念,同时由知识点网络构造题库.

给定 n 个具有约束关系的知识点,可以组成 2^n 个知识点组合.如图 2 的知识点网络 T_1 所示,其知识点有 a, b, c, d, e,对应的知识点组合有 $2^5 = 32$ 个.值得一提的是,不是每个知识点组合都有实际意义,即不是所有的知识点组合都能满足知识点网络 T_1 中各知识点之间的约束关系.

定义 11　设 T 是一个知识点网络,不与 T 中各个知识点之间的约束关系发生冲突的知识点组合称为 T 的一个有效知识点组合,否则称为无效知识点组合.

知识点组合 $(1,1,1,0,0)^T$,即 $\{a, b, c\}$ 为图 2 知识点网络 T_1 中的有效知识点组合,因为它和 T_1 中各知识点之间的约束关系不发生冲突.知识点组合 $(1,0,1,1,1)^T$,即 $\{a, c, d, e\}$ 为图 2 知识点网络 T_1 中的无效知识点组合,因为知识点 b 和 d 具有约束关系,组合 $(1,0,1,1,1)^T$ 中包含了知识点 d 却没有包含对应的约束属性,即知识点 b.

定义 12　设某一知识领域 D 中 n 个知识点之间具有约束关系,其对应的知识点网络为 T.定义一个 n 行 n 列的矩阵 A 如下:

$A = [a_{ij}], 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n$

其中，第 i 行第 j 列元素 a_{ij} 取值为：

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{个知识点到第}j\text{个知识点具有直接相邻关系}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

称 A 为知识点网络 T 对应的邻接矩阵．

知识点网络 T_1 对应的邻接矩阵 A_1 为：

$$A_1=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

邻接矩阵 A_1 中，第一行 $a_{12}=1$ 表示第一个知识点 a 到第二个知识点 b 具有直接相邻关系，$a_{13}=1$ 表示第一个知识点 a 到第三个知识点 c 具有直接相邻关系．很显然，邻接矩阵 A_1 中有整行都为0的情形，如第四行，表示第四个知识点 d 与其他知识点不具有直接相邻关系．

定义13　设某一知识领域 D 中 n 个知识点之间具有约束关系，其对应的知识点网络为 T. 定义一个 n 行 n 列的矩阵 R 如下：

$$R=[r_{ij}],1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant n$$

其中，第 i 行第 j 列元素 r_{ij} 取值为：

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & \text{知识点}i\text{到}j\text{具有直接或间接相邻关系}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

称 R 为知识点网络 T 对应的可达矩阵．

知识点网络 T_1 对应的可达矩阵 R_1 为：

$$R_1=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

可达矩阵 R_1 中，$r_{ij}=1$ 表示知识点 i 是 j 的直接或间接先决条件．如 R_1 的第一行表示知识点 a 是其自身的直接先决条件，也是知识点 b 和 c 的直接先决条件，还是知识点 d 和 e 的间接先决条件．

引理1[31]　可达矩阵 R 由邻接矩阵 A 经计算得到，如下式所示：

$$R=(A+E)^n=(A+E)\otimes\cdots\otimes(A+E)$$

其中，E 为单位矩阵，$\otimes$ 为布尔积，n 为可达矩阵 R 达到不变时至少需经过的布尔积次数+1.

定义14　在知识点网络中，对于知识点 a 和 b，如果 a 是 b 的直接或间接先决条件，则称 a 是 b 的约束结点．

注：任意结点都是其自身的约束结点．

性质1　设 T 为知识点网络，若知识点 a 是知识点 b 的约束结点，则 a 的所有约束结点都是 b 的约束结点．

性质2　设 T 为知识点网络，R 为由 T 得到的可达矩阵．R 的第 i 行表示第 i 个结点能够直接或间接到达的结点集，第 j 列表示第 j 个结点的所有约束结点的集合．

定理1　设 T 为知识点网络，其对应的可达矩阵 R 记为 $R=(r_1,r_2,\cdots,r_n)$，则 R 的每一列 $r_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为 T 的一个有效知识点组合．

证明　取 R 中任意一列 r_i，由性质2可知，R 中第 r_i 列表示第 i 个结点的所有约束结点的集合，即结点 i 的所有约束结点都在第 r_i 列中．另外，T 中的开始结点为 T 中任意结点的约束结点，因此 R 中第 r_i 列包含 T 中从开始结点到第 i 个结点的所有结点，则 R 中的每一列 r_i 都可表示为 T 中一个包含开始结点的子网络，故 R 的每一列 $r_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都可表示为 T 的一个有效知识点组合．

得证．

定理2　设 T 为知识点网络，$R=(r_1,r_2,\cdots,r_n)$ 为 T 的可达矩阵，则 R 中任意列的布尔加仍为 T 的一个有效知识点组合．

证明　任取 R 中两列 r_1 和 r_2，由定理1可知，r_1 和 r_2 都表示 T 中包含开始结点的子网络，即 $r_1\neq\varnothing$ 且 $r_2\neq\varnothing$，因此 $r_1\oplus r_2\neq\varnothing$. 因为 r_1 和 r_2 都为有效知识点组合，故由定理1可知 $r_1\oplus r_2\neq\varnothing$ 可表示为 T 中包含开始结点的子网络，故 R 中任意两列的布尔加仍为 T 的一个有效知识点组合．以此类推，可得 R 中任意列的布尔加仍为 T 的一个有效知识点组合．

得证．

推论1　设 T 为具有 n 个知识点的网络，则 T 中任意包含开始结点的子网络都为 T 的一个有效知识点组合，且 T 的任意个有效知识点组合的布尔加仍为 T 的一个有效知识点组合．

证明　由定理2可得证．

记知识点网络的所有有效知识点组合为 Qb 矩阵，Qb 矩阵可由 Yang et al[32] 的渐增式扩张算法得到．

由以上的讨论可知,Qb 矩阵的每一列皆为其对应的知识点网络 T 的一个有效知识点组合.为了评估学习者关于知识点网络 T 中各知识点的掌握情况,题库命题专家依据 Qb 矩阵各列设计相应的题目,所有题目组成知识点网络 T 的题库提供给学习者进行测试,检测学习者在知识点网络 T 下各知识点的掌握情况.

由知识点网络 T 构建题库的步骤:

(1)由定义12求 T 的邻接矩阵 A.

(2)由引理1求 T 的可达矩阵 R.

(3)由 Yang et al[32] 的渐增式扩张算法得到 T 的所有有效知识点组合,即 Qb 矩阵.

(4)邀请题库命题专家对 Qb 矩阵中每一列有效知识点组合设计相应题目,即可得知识点网络 T 对应的题库.

例2 知识点网络 T_1 对应题库的构建过程:

(1)由定义12求 T_1 的邻接矩阵 A_1.

(2)由引理1求 T_1 的可达矩阵 R_1.

(3)由 Yang et al[32] 的渐增式扩张算法得到 Qb_1 矩阵:

$$Qb_1=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1&1\\0&1&0&1&0&1&1&1&1\\0&0&1&0&1&1&1&1&1\\0&0&0&1&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1&0&1&0&1\end{pmatrix}$$

(4)邀请题库命题专家对 Qb_1 矩阵中每一列有效知识点组合设计相应题目,从而得到知识点网络 T_1 对应的题库.

2.3 知识点背景 由以上讨论可知,Qb 矩阵的每一列都是有效知识点组合.设 Qb 为 $m\times n$ 的矩阵,若视 Qb 矩阵的第 i 行($i=1,2,\cdots,m$)为知识点属性 d_i,所有知识点属性构成知识领域 $D=\{d_1,d_2,\cdots,d_m\}$,视 Qb 矩阵的第 j 列($j=1,2,\cdots,n$)为问题对象 q_j,所有问题对象构成问题域 $Q=\{q_1,q_2,\cdots,q_n\}$. 对于任意 $b_{ij}\in Qb$,$b_{ij}=1$ 表示问题 q_j 与知识点 d_i 有关,$b_{ij}=0$ 表示问题 q_j 与知识点 d_i 无关.由问题域 Q、知识领域 D 和 Qb 矩阵可得一形式背景,称为由知识点网络诱导的知识点背景.

定义15 给定知识点网络 T,其所有有效知识点组合为 Qb 矩阵,称三元组 (D,Q,I) 为由知识点网络 T 诱导的知识点背景.其中,$D=\{d_1,d_2,\cdots,d_m\}$ 为 Qb 矩阵所有行属性构成的知识领域,$Q=\{q_1,q_2,\cdots,q_n\}$ 为 Qb 矩阵所有列对象构成的问题域.$I\subseteq Q\otimes D$ 是 Q 和 D 之间的二元关系.对于任意 $b_{ij}\in Qb$,若 $b_{ij}=1$,则 $(q_j,d_i)\in I$ 表示知识点 d_i 与问题 q_j 的求解相关;若 $b_{ij}=0$,则 $(q_j,d_i)\notin I$ 表示知识点 d_i 与问题 q_j 的求解无关.

定义16 给定知识点网络 T,其所有有效知识点组合为 Qb 矩阵.称三元组 (D,Q,τ) 为知识点网络 T 诱导的知识点函数,其中,$D=\{d_1,d_2,\cdots,d_m\}$ 为 Qb 矩阵所有行属性构成的知识领域,$Q=\{q_1,q_2,\cdots,q_n\}$ 为 Qb 矩阵所有列对象构成的问题域,τ 是从 Q 到 $2^D\setminus\{\varnothing\}$ 的映射.对于任意 $b_{ij}\in Qb$,若 $b_{ij}=1$,则 $d_i\in\tau(q_j)$ 表示知识点 d_i 与问题 q_j 的求解相关;若 $b_{ij}=0$,则 $d_i\notin\tau(q_j)$ 表示知识点 d_i 与问题 q_j 的求解无关.$\tau(q_j)\subseteq D$ 表示与问题 q_j 求解相关的知识点组合.

一个问题的求解与哪些知识点有关联,由问题和知识点的关系决定.对于知识点函数 (D,Q,τ),$\tau(q)\subseteq D$ 表示与问题 q 求解相关的知识点组合.对于知识点背景 (D,Q,I),$(q,d)\in I$ 表示知识点 d 与问题 q 的求解相关,于是 $(d,q)\in I\Leftrightarrow d\in\tau(q)$,从而知识点函数 (D,Q,τ) 和知识点背景 (D,Q,I) 可以互相唯一确定.

定义17 设三元组 (D,Q,I) 为知识点背景,在知识点组合集 $N\subseteq D$ 和问题集 $M\subseteq Q$ 上分别定义以下运算:

$$N^{\square}=\{q\in Q\,|\,q^*\subseteq N\}$$

$$M^{\diamond}=\{d\in D\,|\,d^*\cap M\neq\varnothing\}$$

其中,$N^{\square}$ 表示仅与 N 中所有知识点相关的问题集,$M^{\diamond}$ 表示与 M 中问题相关的知识点组合.特别地,记 $\{d\}^{\square}=d^{\square}$,$\{q\}^{\diamond}=q^{\diamond}$.

若二元组 (N,M) 满足 $N^{\square}=M$ 且 $N=M^{\diamond}$,则称 (N,M) 为知识点背景 (D,Q,I) 的一个知识点概念(简称概念),其中 N 是概念的外延,M 是概念的内涵.

对于知识点背景 (D,Q,I),记 $L(D,Q,I)=$

$\left\{(N,M)\middle|N^{\square}=M,N=M^{\diamond}\right\}$，即 $L(D,Q,I)$ 为知识点背景 (D,Q,I) 的全体概念，称 $L(D,Q,I)$ 为知识点背景 (D,Q,I) 的概念格.

例3　由知识点网络 T_1 诱导的知识点背景 (D_1,Q_1,I_1) 如表1所示，对应的概念格 $L(D_1,Q_1,I_1)$ 如图3所示，其中，$D_1=\{a,b,c,d,e\}$，$Q_1=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. 知识点映射 τ_1 如下：

$\tau_1(1)=\{a\}$，$\tau_1(2)=\{a,b\}$，$\tau_1(3)=\{a,c\}$

$\tau_1(4)=\{a,b,d\}$，$\tau_1(5)=\{a,c,e\}$

$\tau_1(6)=\{a,b,c\}$，$\tau_1(7)=\{a,b,c,e\}$

$\tau_1(8)=\{a,b,c,d\}$，$\tau_1(9)=\{a,b,c,d,e\}$

表1　知识点网络 T_1 诱导的知识点背景 (D_1,Q_1,I_1)

Table 1　The induced Knowledge-point context (D_1,Q_1,I_1) of knowledge-point network T_1

D_1/Q_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	1	1	1	1	1	1	1	1	1
b	0	1	0	1	0	1	1	1	1
c	0	0	1	0	1	1	1	1	1
d	0	0	0	1	0	0	0	1	1
e	0	0	0	0	1	0	1	0	1

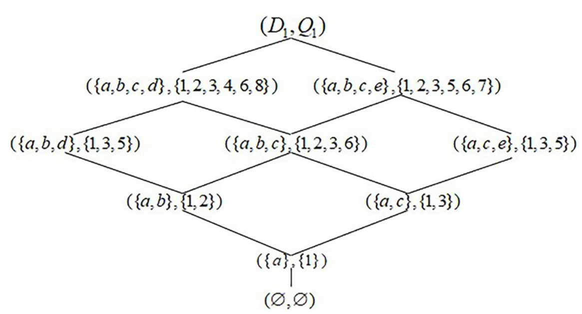

图3　知识点背景 (D_1,Q_1,I_1) 对应的概念格 $L(D_1,Q_1,I_1)$

Fig. 3　The concept lattice $L(D_1,Q_1,I_1)$ corresponding to the knowledge-point context (D_1,Q_1,I_1)

为了对测试结果进行知识评估并指导学习者进行下一步的有效认知学习，应用形式概念分析方法在知识点网络诱导的知识点背景下讨论知识评估和学习路径选择问题.

3　知识评估和学习路径

在教育领域，评价是重要的组成部分，学习者经过一个阶段的学习后，便可对其当前掌握的知识进行测试（学习者可在本文讨论的知识点网络下构建的题库中进行自适应测试，如何进行自适应测试不在本文中讨论）. 同时，现实生活中，学习者掌握了某些知识点，但自身的知识状态并不一定发生变化. 为了让学习者每学习一个新的知识点，自身的知识状态都会发生变化，即取得切实的进步，应在知识点网络诱导的知识点背景下对学习者进行知识评估并给出针对不同个体的个性化学习路径图，让学习者从图中选取一条适合自身的学习路径，而且每学习一个知识点都可以改变自身的知识状态.

定义18　设 D 为知识领域，D 中的一些子集构成集族 ς 且 ς 至少包含空集 $\varnothing$ 和全集 D，(D,ς) 称为知识点结构（Knowledge-Point Struture），记 $\varsigma=\{\varnothing,P_1,P_2,\cdots,D\}$，其中，$P_i\subseteq D\,(i=1,2,\cdots)$ 为知识点组合. 给定知识领域 D 时，直接称 ς 为知识点结构.

定义19　设 (Q,κ) 为知识结构，若学习者的知识状态为 $K_1\in\kappa\,(K_1\neq Q)$，学习掌握新的知识点 d 后达到下一个知识状态 $K_2\in\kappa\,(K_1\subset K_2)$，则 K_2 为 K_1 的后继状态，知识点 d 为知识状态 K_1 到 K_2 的有效知识点.

定理3　给定知识点网络 T，其诱导的知识点函数为 (D,Q,τ)，知识点背景为 (D,Q,I)，相应的概念格为 $L(D,Q,I)$. 对 $\forall(N,M)\in L(D,Q,I)$，N 通过 τ 诱导得到的知识状态为 M.

证明　对于 $\forall(N,M)\in L(D,Q,I)$ 有 $M=N^{\square}$，又 $N^{\square}=\left\{q\in Q\middle|q^{*}\subseteq N\right\}$，且 $q^{*}=\left\{d\in N\middle|(d,q)\in I\right\}=\tau(q)$. 由此可知，对于 $\forall q\in Q$，有 $q^{*}=\tau(q)$，故有 $M=\left\{q\in Q\middle|\tau(q)\subseteq N\right\}$.

得证.

定理4　给定知识点网络 T，其诱导的知识点函数为 (D,Q,τ)，知识点背景为 (D,Q,I)，相应的概念格为 $L(D,Q,I)$. 对 $\forall(N,M)\in L(D,Q,I)$，若学习者的知识状态为 $M\in\kappa$，则其必定掌握的知识点组合为 N.

证明　如果学生的知识状态为 $M\in\kappa$，表明该生掌握了解决 M 中问题相关的所有知识点. 知识点背景中，$M^{\diamond}$ 表示与 M 中问题相关的知识点组合且 $M^{\diamond}=N$，则该生掌握的知识点组合为 N.

得证.

定理5 给定知识点网络T,其诱导的知识点背景为(D,Q,I),确定的知识结构为(Q,κ),知识点结构为(D,ς),则$|\kappa|=|\varsigma|$且ς中的知识点组合N和κ中的知识状态M一一对应.

证明 由定理3可知,在知识点背景(D,Q,I)中,对于$\forall N\in\varsigma$,都有对应的$M\in\kappa$,又$\varsigma=\{N|(N,M)\in L(D,Q,I)\}$且$\kappa=\{M|(N,M)\in L(D,Q,I)\}$,故有$|\varsigma|=|\kappa|$且$\varsigma$中的知识点组合$N$和$\kappa$中的知识状态$M$一一对应.

得证.

由定理5可知,知识点网络T确定的知识结构(Q,κ)中的知识点组合N和知识点结构(D,ς)中的知识状态M一一对应,由此对应关系得到的表格为知识点网络T的知识评估表.

对于知识点网络T,由2.2可得知识点网络T对应的题库,学习者在该题库上进行测试,评估对试题的回答情况即可得到学习者真实的知识状态.进一步,由定理5得到知识点网络T下的知识评估表,由此可对学习者进行知识评估.

在知识点网络下对学习者进行知识评估的步骤如下:

(1)构建知识点网络T对应的题库.

(2)由定义15诱导知识点网络T对应的知识点背景(D,Q,I).

(3)由知识点背景(D,Q,I),通过算子"□"和"◊"确定知识点结构ς和知识结构κ.

(4)由定理5得知识点网络T的知识评估表.

(5)学习者在题库上进行测试,得到的测试结果即为知识状态.

(6)由知识评估表即可评估学习者在当前知识状态下已掌握的知识点.

例4 在知识点网络T_1下进行知识评估的过程如下:

(1)构建知识点网络T_1对应的题库.

(2)由定义15诱导知识点网络T_1对应的知识点背景(D_1,Q_1,I_1).

(3)由知识点背景(D_1,Q_1,I_1),通过算子"□"和"◊"确定知识结构κ_1和知识点结构ς_1分别为:

$$\kappa_1=\{\{\varnothing\},\{1\},\{1,3\},\{1,2\},\{1,3,5\},\{1,2,4\},\{1,2,3,6\},\{1,2,3,5,6,7\},\{1,2,3,4,6,8\},\{Q_1\}\}$$

$$\varsigma_1=\{\{\varnothing\},\{a\},\{a,c\},\{a,b\},\{a,c,e\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,b,c,e\},\{a,b,c,d\},\{D_1\}\}$$

(4)由定理5得知识点网络T_1的知识评估表,如表2所示.

(5)学习者在题库上进行测试,得到的测试结果即为一知识状态.设学习者经测试后的知识状态为$\{1,2\}$.

(6)由知识评估表2,评估学习者在当前知识状态$\{1,2\}$下掌握的知识点组合为$\{a,b\}$,同时,可知其没有掌握的知识点组合为$\{c,d,e\}$.

表2 知识点网络T_1的知识评估表

Table 2 The knowledge assessment table of knowledge-point network T_1

知识状态	知识点组合
$\varnothing$	$\varnothing$
1	a
1,2	a,b
1,3	a,c
1,3,5	a,c,e
1,2,4	a,b,d
1,2,3,6	a,b,c
1,2,3,5,6,7	a,b,c,e
1,2,3,4,6,8	a,b,c,d
Q_1	D_1

由评估结果可以得到学习者的知识结构和认知缺陷,而现实生活中,不同个体的知识结构和认知缺陷常常不同,某个学习者的学习过程不一定适用于其他个体,所以根据学习者的测试结果来指导下一步的学习至关重要,学习者需要针对自身对知识的掌握情况选择合适的学习路径进行下一步的学习.下面给出知识点网络下的个性化学习路径图,以便学习者选择适合自身情况的学习路径进行下一步学习.

定理6 给定知识点网络T,由其诱导的知识点背景为(D,Q,I),相应的概念格为$L(D,Q,I)$.若$(N_1,M_1),(N_2,M_2)\in L(D,Q,I)$且$(N_1,M_1)$为$(N_2,M_2)$的上邻,则有$N_2\subset N_1$且$|N_1|-|N_2|=1$.$N$的势记作$|N|$.

证明　由$(N_2,M_2)\prec(N_1,M_1)$有$(N_2,M_2)\leqslant(N_1,M_1)$,由定义3可得$N_2\subset N_1$. 假设$T$中知识点个数为$n$,设$|N_2|=k(k\leqslant n-1)$,因为$N_2\subset N_1$,所以有$|N_1|\geqslant k+1$. 则$N_1$能用来表示为$T$的一个子图$T_1$,令$N_4=N_1/N_2$,则$|N_4|\geqslant 1$且$N_4$中至少包含了$T_1$中的叶结点. T_1中去除N_4中对应结点后的子图仍旧是符合T的一个知识点组合$N_3=N_1/N_4$且满足$N_2\subset N_3\subset N_1$,$|N_3|\geqslant k+1$. 若$M_3=N_3^{\square}$,则$(N_3,M_3)$为$L(D,Q,I)$的一个概念,由定义4有$(N_2,M_2)\leqslant(N_3,M_3)\leqslant(N_1,M_1)$,与上下邻的定义矛盾,故$|N_1|>k+1$不成立,即$|N_1|=k+1$.

得证.

定理7　给定知识点网络T,由其诱导的知识点背景为(D,Q,I),则由知识点背景(D,Q,I)确定的知识点结构满足良级性.

证明　由定理6可知,对于知识点网络T诱导的知识点背景(D,Q,I)对应的概念格$L(D,Q,I)$,其中任意概念(N,M)的上邻概念(N_1,M_1)和下邻概念(N_2,M_2)都有$N\subset N_1$和$N_2\subset N$,且有$|N_1|-|N|=1$和$|N|-|N_2|=1$. 由定义6可知,由知识点背景(D,Q,I)确定的知识点结构构成的序列满足良级性.

得证.

推论2　给定知识点网络T,由其诱导的知识点背景为(D,Q,I),相应的概念格为$L(D,Q,I)$,则$L(D,Q,I)$中任意一对上邻和下邻概念$(N_1,M_1)\leqslant(N_2,M_2)$,$d\in(N_2-N_1)$为$M_1$到$M_2$的有效知识点.

证明　由定理6和定理7可得证.

综上,可得知识点网络T下的学习路径图$\mathbb{G}$算法.

算法　知识点网络T下的学习路径图$\mathbb{G}$

输入:知识点网络T对应的邻接矩阵A

输出:学习路径图$\mathbb{G}$

---

1. 初始化$Qb=\varnothing$,$\mathbb{G}$为空图,$\mathbb{Z}=\varnothing$,$\varnothing\to\mathfrak{I}$,$\varnothing\to\mathfrak{R}$ /*$\mathfrak{I}$为$\mathbb{G}$中所有学习路径,$\mathfrak{R}$为$\mathbb{G}$中所有边的集合*/
2. for　$k=1$ to n
3. 　if　$(A+E)^k=(A+E)^{k+1}$/*A为邻接矩阵,E为单位矩阵,$(A+E)^k$表示$(A+E)$做k次布尔乘积*/
4. 　　$R=(A+E)^k$
5. 　　break;/*提前结束for循环语句*/
6. 　end if
7. end for
8. 令$R=(r_1,r_2,\cdots,r_n)$
9. $a_1=r_1$,$Qb=(a_1)$
10. $m=2$
11. for $j=2$ to n
12. 　for $t=m-1$ to 1
13. 　　$b=r_j\oplus a_t$;/*$r_j\oplus a_t$作布尔加运算*/
14. 　　if b与Qr中的任意一列均不同
15. 　　　$a_m=b$,并把a_m放入Qr中
16. 　　　$m=m+1$
17. 　　end if
18. 　end for
19. end for
20. 　得$Qb=(a_1,a_1,\cdots,a_m)$
21. 由Qb矩阵得到知识点背景(D,Q,I)
22. 记$Q=\{q_1,q_2,\cdots,q_n\}$
23. for $i=1$ to n
24. 　$\mathbb{Z}=\mathbb{Z}\cup(q_i^{\diamond})$
25. end for
26. 记$\mathbb{Z}=\{T_1,T_2,\cdots,T_n\}\cup T_{n+1}$,其中$T_{n+1}=\varnothing$
27. for $i=1$ to n
28. 　for $j=i+1$ to $n+1$
29. 　　if$|T_i|=|T_j|+1$ && $T_j\subset T_i$
30. 　　　$N=T_i-T_j$/*N为边上的标,即知识点*/
31. 　　　$\mathfrak{R}\leftarrow\mathfrak{R}\cup((T_j^{\square},T_i^{\square}),N)$/*其中$(T_j^{\square},T_i^{\square})$是由$T_j^{\square}$指向$T_i^{\square}$的边*/
32. 　　end if
33. 　end for
34. end for
35. 得到学习路径图$\mathbb{G}$

算法的时间复杂度分析:

假设知识点网络中的技能个数为n,则需输入$n\times n$的邻接矩阵.

第2~8行是通过邻接矩阵计算得到的可达矩阵的过程,其中需经n次布尔积运算,时间复杂度为$o(n)$.

第9~20行是通过可达矩阵得到Qb矩阵的过程. 若可达矩阵有n列,最终得到的Qb矩阵为m列,则时间复杂度为$o(m\times n)$.

第 21～26 行是由 Qb 矩阵对应的知识点背景得到知识结构的过程，该过程遍历问题集中的 n 个问题，时间复杂度为 $o(n)$.

第 27～35 行是路径图的生成过程，该过程使用冒泡算法进行排序，时间复杂度为 $o(n^2)$.

例 5 由前文算法求取知识点背景 (D_1, Q_1, I_1) 的学习路径图 $\mathbb{G}_1$ 的过程 .

(1)由算法第 1 行初始化 $\mathbb{G}_1$ 为空图，$Qb_1=\varnothing$，$\mathbb{Z}_1=\varnothing$，$\varnothing\rightarrow\mathfrak{I}_1$，$\varnothing\rightarrow\mathfrak{R}_1$，$Q_1=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

(2)由算法第 2～7 行得可达矩阵 R_1.

首先，取 $k=1$，有：

$$(A_1+E)=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&1&&\\&&&1&\\&&&&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$(A_1+E)^2=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1&1&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

由于 $(A_1+E)\neq(A_1+E)^2$，继续取 $k=2$，有：

$$(A_1+E)^3=(A_1+E)^2\otimes(A_1+E)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1&1&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

此时 $(A_1+E)^2=(A_1+E)^3$，故得可达矩阵 R_1 为：

$$R_1=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

(3)由算法第 8～21 行可得 Qb_1 矩阵为：

$$Qb_1=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1&1\\0&1&0&1&0&1&1&1&1\\0&0&1&0&1&1&1&1&1\\0&0&0&1&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1&0&1&0&1\end{pmatrix}$$

其对应的知识点背景 (D_1, Q_1, I_1) 如表 3 所示 .

表 3 Qb_1 对应的知识点背景 (D_1, Q_1, I_1)

Table 6 Knowledge - point context (D_1, Q_1, I_1) corresponding to Qb_1

D_1/Q_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	1	1	1	1	1	1	1	1	1
b	0	1	0	1	0	1	1	1	1
c	0	0	1	0	1	1	1	1	1
d	0	0	0	1	0	0	0	1	1
e	0	0	0	0	1	0	1	0	1

(4)由算法第 22～26 行可得

$$\mathbb{Z}_1=(\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,c,e\},\{a,b,d\},\{a,b,c\},\{a,b,c,e\},\{a,b,c,d\},D_1)$$

(5)由算法第 27～35 行可知，对于概念 $(\{b,d,e\},\{1,3\})$ 和 $(\{b,d\},\{1,3,5\})$，$\{1,3,5\}$ 为 $\{1,3\}$ 的后继状态 . 由推论 2 可知，知识点 e 为 $\{1,3\}$ 到 $\{1,3,5\}$ 的有效知识点 . 以此类推，得到知识点背景 (D_1, Q_1, I_1) 下知识领域 D_1 的学习路径图 $\mathbb{G}_1$，如图 4 所示 . 由图可知，若想达成学习目

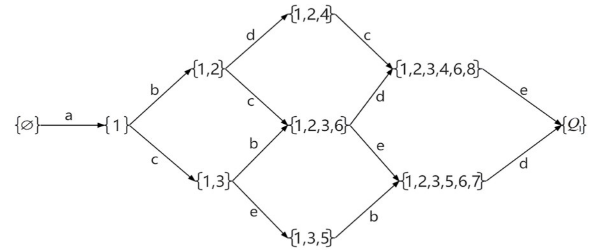

图 4 知识点背景 (D_1, Q_1, I_1) 下 D_1 的学习路径图 $\mathbb{G}_1$

Fig. 4 The learning paths diagram $\mathbb{G}_1$ for D_1 in knowledge-point context (D_1, Q_1, I_1)

标,学习者可以根据个人能力选择不同的学习路径.如学习者的目标知识状态为$\{1,2,3,4,6,8\}$,其可根据自身情况选择学习路径$a\to b\to d\to c$,$a\to c\to b\to d$ 或 $a\to b\to c\to d$.还可以看到,知识状态$\{1\}$到其后继状态的有效知识点为b和c,学习者掌握知识点b后,其知识状态可由$\{1\}$达到知识状态$\{1,2\}$,若掌握知识点c,其知识状态为$\{1,3\}$.

注:学习者按图4所示的学习路径图进行学习,不仅可以提高其学习效率,还能使其每学习一个新的知识点都能改变自身的知识状态.

4　实验及结果分析

通过实验验证提出的算法的有效性和可行性.实验环境:i5-7200U CPU,4 GB内存,64位 Windows 11,Matlab R2016a,Python3.8.

4.1　实验数据　实验数据集1选取初中数学关于圆的5个知识点,如表4所示,其构成的知识点网络T_2如图5所示.

表4　与圆相关的知识点

Table 4　Related knowledge points of circle

知识点	知识点描述
a	圆的概念
b	圆的位置判断
c	圆的面积
d	扇形的表面积
e	圆锥的表面积

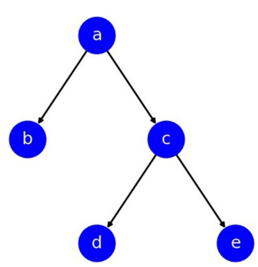

图5　知识点网络T_2

Fig. 5　Knowledge-point network T_2

知识点网络T_2对应的邻接矩阵A_2为:

$$A_2=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

实验数据集2选取"一元一次不等式"章节的知识点,如表5所示,其构成的知识点网络T_3如图6所示.

表5　"一元一次不等式"的相关知识点

Table 5　Related knowledge points of "linear ineqality with one unknown"

知识点	知识点描述
a	不等式的概念
b	不等式性质1:如果$a>b$,那么$a+c>b+c$,或者$a-c>b-c$
c	不等式性质2:如果$a>b,c>0$,那么$ac>bc$,或者$a/c>b/c$
d	不等式性质3:如果$a>b,c<0$,那么$ac<bc$,或者$a/c<b/c$
e	解"一元一次不等式"

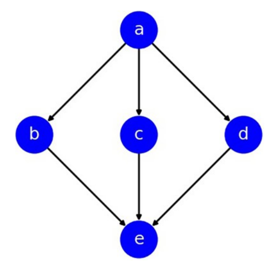

图6　知识点网络T_3

Fig. 6　Knowledge-point network T_3

知识点网络T_3对应的邻接矩阵A_3为:

$$A_3=\begin{pmatrix}0&1&1&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

4.2　实验结果及分析

4.2.1　实验数据集1(知识点网络T_2)的实验分析

由前文算法可得知识点网络T_2诱导的Qb_2矩阵对应的知识点背景(D_2,Q_2,I_2)如表6所示,其中,知识领域$D_2=\{a,b,c,d,e\}$,问题域$Q_2=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.知识点背景$(D_2,Q_2,I_2)$下的知识评估如表7所示,由算法得到知识点背景$(D_2,Q_2,I_2)$下的学习路径图如图7所示.

图7中的结点0～10为11个不同的知识状态,分别对应表7中的知识状态$\{\varnothing\}$,$\{1\}$,$\{1,2\}$,$\{1,4\}$,$\{1,4,5\}$,$\{1,4,9\}$,$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,3,4,5,6\}$,$\{1,2,3,4,9,10\}$,$\{Q_2\}$.

表 6 知识点网络 T_2 诱导的知识点背景(D_2,Q_2,I_2)

Table 6 Knowledge-point context (D_2,Q_2,I_2) induced by knowledge-point network T_2

D_2/Q_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
b	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
c	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
d	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
e	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

表 7 知识点背景(D_2,Q_2,I_2)下的知识评估

Table 7 Knowledge assessment of knowledge-point context (D_2,Q_2,I_2)

知识状态	知识点组合
$\varnothing$	$\varnothing$
1	a
1,4	a,c
1,2	a,b
1,4,9	a,c,e
1,4,5	a,c,d
1,2,3,4	a,b,c
1,2,3,4,9,10	a,b,c,e
1,4,5,8,9	a,c,d,e
1,2,3,4,5,6	a,b,c,d
Q_2	D_2

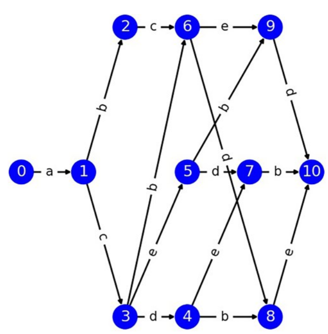

图 7 知识点背景(D_2,Q_2,I_2)下 D_2 的学习路径图

Fig. 7 The learning paths diagram for D_2 in knowledge-point context (D_2,Q_2,I_2)

由图 7 所示的学习路径可知,学习者可选取其中任意一条学习路径进行学习,每学习一个新的知识点,其自身的知识状态就会发生改变.如某位学生选取学习路径 $a \to c \to e \to b \to d$,最初其知识状态为$\{\varnothing\}$;学习知识点 a 之后,其知识状态为$\{1\}$,此时,该生对圆有了初步认识,可以回答识别圆的相关问题;进一步,学习知识点 c,其知识状态改变为$\{1,3\}$,此时,该学生不仅认识了圆,还掌握了圆的面积计算公式,可以做相关试题对知识点进行巩固.该生按此学习路径一步一步学习,最终掌握所有知识点$\{a,b,c,d,e\}$,此时,学生的知识状态为$\{Q_2\}$,即该生不仅对圆的概念有深入的了解,还能计算圆的面积、计算扇形的面积、计算圆锥体的面积等等.同时,学习者可以根据个人当前的知识状态选取一条适合自身的学习路径.若学生当前的知识状态为$\{1,4,5\}$,其对应的知识点状态为$\{a,c,d\}$,此时可选择学习路径 $a \to c \to d \to b \to e$ 或 $a \to c \to d \to e \to b$ 进行学习.若选取 $a \to c \to d \to b \to e$,学习者学习知识点 b 之后,自身的知识状态改变为$\{1,2,3,4,5,6\}$.根据此学习路径进行学习,学生可以逐步地有效掌握知识点,直至掌握所有的知识点.

4.2.2 实验数据集 2(知识点网络 T_3)的实验分析

由前文算法可得知识点网络 T_3 诱导的 Qb_3 矩阵对应的知识点背景(D_3,Q_3,I_3)如表 8 所示,其中知识领域 $D_3=\{a,b,c,d,e\}$,问题域 $Q_3=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.知识点背景($D_3,Q_3,I_3$)下的知识评估如表 9 所示.由算法得到知识点背景(D_3,Q_3,I_3)下的学习路径图如图 8 所示.

图 8 中的结点 0~9 为 10 个不同的知识状态,分别对应表 9 中的知识状态$\{\varnothing\}$,$\{1\}$,$\{1,2\}$,$\{1,3\}$,$\{1,4\}$,$\{1,2,3,5\}$,$\{1,2,4,6\}$,$\{1,3,4,7\}$,$\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,$\{Q_3\}$.

由图 8 所示的学习路径可知,学习者可选取其中任意一条学习路径进行学习,每学习一个新的知识点,其自身的知识状态就会发生改变.如某位学生选取学习路径 $a \to c \to d \to b \to e$,最初其知识状态为$\{\varnothing\}$;学习知识点 a 之后,其知识状态为$\{1\}$,此时,该生对不等式有了初步认识,可以回答相关问题;进一步,学习知识点 c,其知识状态改变为$\{1,3\}$,此时,该生不仅了解不等式的概念,还掌握了不等式性质 2,可以做相关试题对知识点进行巩固.该生按此学习路径一步一步学习,最终掌握所有知识点$\{a,b,c,d,e\}$,此时,学生的知识状态为$\{Q_3\}$,即该生不仅对不等式的概念

表8　知识点网络 T_3 诱导的知识点背景(D_3, Q_3, I_3)

Table 8　Knowledge-point context (D_3, Q_3, I_3) induced by knowledge-point network T_3

D_3/Q_3	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	1	1	1	1	1	1	1	1	1
b	0	1	0	0	1	1	0	1	1
c	0	0	1	0	1	0	1	1	1
d	0	0	0	1	0	1	1	1	1
e	0	0	0	0	0	0	0	0	1

表9　知识点背景(D_3, Q_3, I_3)下的知识评估

Table 9　Knowledge assessment of knowledge-point context (D_3, Q_3, I_3)

知识状态	知识点组合
$\varnothing$	$\varnothing$
1	a
1,2	a,b
1,3	a,c
1,4	a,d
1,2,3,5	a,b,c
1,2,4,6	a,b,d
1,3,4,7	a,c,d
1,2,3,4,5,6,7,8	a,b,c,d
Q_3	D_3

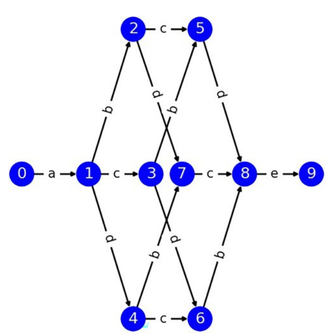

图8　知识点背景(D_3, Q_3, I_3)下 D_3 的学习路径图

Fig. 8　The learning paths diagram for D_3 in knowledge-point context (D_3, Q_3, I_3)

有深入的了解,掌握了不等式的所有性质,还可以解一元一次不等式.同时,学习者可根据个人当前的知识状态选取一条适合自身的学习路径.若学生当前的知识状态为{1,4},其对应的知识点状态为{a, d},此时可选择学习路径 $a \to d \to c \to b \to e$ 或 $a \to d \to b \to c \to e$ 进行学习.学习者任选一条学习路径,每学一个知识点都可改变自身的知识状态,直至掌握所有知识点.

由以上的实验结果可知,由知识点网络得到的知识点背景确定的知识点结构满足良级性,由此得到知识点背景下的学习路径图可以使学生每学习一个新的知识点就能改变自身的知识状态,有利于学习者选取适合自身的学习路径进行有效学习,直至掌握所有的知识点.根据学习路径图进行学习,可提交学习者的学习效率并指导学习者进行逐步的有效学习.

5　结论

本文基于知识点之间的约束关系构建了知识点网络来避免学习者盲目学习,浪费时间;将知识点网络中所有的有效知识点组合构成 Qb 矩阵,由题库专家根据 Qb 矩阵中的知识点组合设计相应的题目构成题库,进一步由 Qb 矩阵诱导知识点背景;最后,由学习者测试后的知识状态可对其进行知识评估,学习者可由评估结果从文中的学习路径图中选择适合自身的学习路径进行学习.

本文基于知识点网络诱导的知识点背景确定的知识点结构满足良级性,所以基于知识点网络得到的学习路径图使学习者每学习一个新的知识点就可改变自身的知识状态.文中还给出了知识点网络下的题库,由此题库对学习者进行自适应测试值得进一步研究.

参考文献

[1] Wille R. Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts//Proceedings of the 7th International Conference on Formal Concept Analysis. Springer Berlin Heidelberg, 2009: 314－339.

[2] 马垣. 形式概念及其新进展. 北京:科学出版社, 2011.

[3] Valtchev P, Missaoui R, Godin R, et al. Generating frequent itemsets incrementally: Two novel approaches based on Galois lattice theory. Journal of Experimental & Theoretical Artificial Intelligence, 2002, 14(2－3): 115－142.

[4] 张云中,柳迪,张原铭. 基于形式概念分析的知识发现研究态势. 情报科学, 2018, 36(9): 153－158. (Zhang Y Z, Liu D, Zhang Y M. Research trend of

knowledge discovery based on formal concept analysis. Information Science, 2018, 36(9): 153－158.)

[5] Zupan B, Bohanec M, Demšar J, et al. Learning by discovering concept hierarchies. Artificial Intelligence, 1999, 109(1－2): 211－242.

[6] Doignon J P, Falmagne J C. Spaces for the assessment of knowledge. International Journal of Man-Machine Studies, 1985, 23(2): 175－196.

[7] Doignon J P, Falmagne J C. Knowledge spaces. Berlin: Springer, 1999.

[8] Steiner C M, Nussbaumer A, Albert D. Supporting self-regulated personalised learning through competence-based knowledge space theory. Policy Futures in Education, 2009, 7(6): 645－661.

[9] Doble C, Matayoshi J, Cosyn E, et al. A data-based simulation study of reliability for an adaptive assessment based on knowledge space theory. International Journal of Artificial Intelligence in Education, 2019, 29(2): 258－282.

[10] Sitthisak O, Gilbert L, Albert D. Adaptive learning using an integration of competence model with knowledge space theory//Proceedings of the 2nd International Conference on Advanced Applied Informatics. Los Alamitos, CA, USA: IEEE, 2013: 199－202.

[11] Craig S D, Hu X E, Graesser A C, et al. The impact of a technology-based mathematics after-school program using ALEKS on student's knowledge and behaviors. Computers & Education, 2013, 68(1): 495－504.

[12] Cosyn E, Uzun H, Doble C, et al. A practical perspective on knowledge space theory: ALEKS and its data. Journal of Mathematical Psychology, 2021 (101): 102512.

[13] Rusch A, Wille R. Knowledge spaces and formal concept analysis//Bock H H, Polasek W. Data analysis and information systems. Springer Berlin Heidelberg, 1996: 427－436.

[14] Heller J, Augustin T, Hockemeyer C, et al. Recent developments in competence-based knowledge space theory//Falmagne J C, Albert D, Doble C, et al. Knowledge spaces. Springer Berlin Heidelberg, 2013: 243－286.

[15] Düntsch I, Gediga G. Skills and knowledge structures. British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 1995, 48(1): 9－27.

[16] de Chiusole D, Stefanutti L, Anselmi P, et al. Stat-Knowlab. Assessment and learning of statistics with competence-based knowledge space theory. International Journal of Artificial Intelligence in Education, 2020, 30(4): 668－700.

[17] Stefanutti L, de Chiusole D. On the assessment of learning in competence based knowledge space theory. Journal of Mathematical Psychology, 2017 (80): 22－32.

[18] Heller J, Ünlü A, Albert D. Skills, competencies and knowledge structures//Falmagne J C, Albert D, Doble C, et al. Knowledge spaces. Springer Berlin Heidelberg, 2013: 229－242.

[19] Heller J, Stefanutti L, Anselmi P, et al. On the link between cognitive diagnostic models and knowledge space theory. Psychometrika, 2015, 80(4): 995－1019.

[20] Heller J, Stefanutti L, Anselmi P, et al. Erratum to: On the link between cognitive diagnostic models and knowledge space theory. Psychometrika, 2016, 81(1): 250－251.

[21] Heller J, Anselmi P, Stefanutti L, et al. A necessary and sufficient condition for unique skill assessment. Journal of Mathematical Psychology, 2017(79): 23－28.

[22] 谢深泉. 知识点及其网络的特性分析. 软件学报, 1998, 9(10): 785－789. (Xie S Q. Analysis of the properties of knowledge points and their networks. Journal of Software, 1998, 9(10): 785－789.)

[23] 刘向, 马费成, 陈潇俊, 等. 知识网络的结构与演化: 概念与理论进展. 情报科学, 2011, 29(6): 801－809. (Liu X, Ma F C, Chen X J, et al. Structure and evolution of knowledge network-concept and research review. Information Science, 2011, 29(6): 801－809.)

[24] 刘萌, 阎高伟, 续欣莹. 基于知识点网络的自动化专业学习路径推荐. 计算机仿真, 2016, 33(6): 180－184. (Liu M, Yan G W, Xu X Y. Learning path recommendation for automation discipline based on knowledge points-based network. Computer Simulation, 2016, 33(6): 180－184.)

[25] 何俊颖. 基于知识点网络的在线学习者有效学习行为的仿真. 电子技术与软件工程, 2021, 000 (007): 191－192. (He J Y. Simulation of effective

learning beha - vior of online learners based on knowledge point network. Electronic Technology & Software Engineering, 2021, 000(007): 191－192.)

[26] Kickmeier - Rust M D, Steiner C M, Albert D. Uncovering learning processes using competence - based knowledge structuring and hasse diagrams// Proceedings of the International Workshop on Visual Aspects of Learning Analytics. 2015:36－40.

[27] 李金海,米允龙,刘文奇. 概念的渐进式认知理论与方法. 计算机学报,2019,42(10):2233－2250. (Li J H, Mi Y L, Liu W Q. Incremental cognition of concepts: Theories and methods. Chinese Journal of Computers,2019,42(10):2233－2250.)

[28] 周银凤,李进金,冯丹露,等. 形式背景下的学习路径与技能评估. 模式识别与人工智能,2021,34(12): 1069－1084. (Zhou Y F, Li J J, Feng D L, et al. Learning paths and skills assessment in formal context. Pattern Recognition and Artificial Intelligence,2021,34(12):1069－1084.)

[29] 童红霞,谢深泉. ICAI中知识点关系的研究. 计算机工程与应用,2004,40(1):77－78,87. (Tong H X, Xie S Q. Research of relationships between knowledge points in intelligence computer-assisted instruction. Computer Engineering and Applications, 2004, 40(1):77－78,87.)

[30] 童红霞,谢深泉. ICAI中知识的表示. 计算机工程与科学,2004,26(3):87－89. (Tong H X, Xie S Q. The representation of knowledge in intelligent computer-assisted instruction. Computer Engineering & Science,2004,26(3):87－89.)

[31] 耿素云. 离散数学. 二分册. 集合论与图论. 北京: 北京大学出版社,1998.

[32] Yang S Q, Ding S L, Ding Q L. Incremental augment algorithm based on reduced Q - matrix. Transactions of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics,2010,27(2):183－189.

（责任编辑　杨可盛）