第 59 卷　第 1 期
2023 年 1 月

南京大学学报(自然科学)
JOURNAL OF NANJING UNIVERSITY
(NATURAL SCIENCE)

Vol. 59, No. 1
Jan., 2023

DOI:10. 13232/j. cnki. jnju. 2023. 01. 001

加权变精度直觉模糊序信息决策表的近似约简

徐伟华*,潘彦舟
(西南大学人工智能学院,重庆,400715)

摘　要:以直觉模糊信息表为背景,利用粗糙集和模糊集,旨在筛除信息表中冗余的属性,提出获取决策规则的近似约简方法. 首先,通过在直觉模糊集中引入带权重评分函数来定义加权直觉模糊序关系;进一步,为了提高模型分类的容错率,结合变精度粗糙集模型构建加权变精度直觉模糊序决策信息表;接着,在该决策表中提出上、下近似约简的判定定理和可辨识矩阵,进而生成两种求解上、下近似约简的方法;最后,通过具体案例和数值实验分析验证了该方法的有效性.

关键词:变精度粗糙集,带权重评分函数,近似约简,可辨识矩阵,直觉模糊集
中图分类号:TP18　　　**文献标志码**:A

Approximate reduction in weighted variable precision intuitionistic fuzzy ordered decision table

Xu Weihua*, Pan Yanzhou
(College of Artificial Intelligence, Southwest University, Chongqing, 400715, China)

Abstract: Aiming at removing irrelevant and redundant attributes, this paper proposes a method of approximate reduction to better require decision rules in intuitionistic fuzzy decision tables. The weighted system is defined via the introduction of a weighted score function in intuitionistic fuzzy sets. Additionally, variable precision rough sets are utilized for a better tolerance to misclassify. Hence, the weighted variable precision intuitionistic fuzzy sets are defined. On the basis of the constructed system, we give conceptions of the judgment theorem and identification matrix of both lower and upper approximate reduction, by which two approaches of reduction are put forward. Finally, a concrete example and numerical tests are used to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: variable precision rough sets, weighted score function, approximate reduction, identification matrix, intuitionistic fuzzy sets

1986 年 Atanassov 基于模糊集理论[1]提出直觉模糊集[2],在隶属度的基础上添加了非隶属度和犹豫度,更全面、精准地刻画了模糊概念. 因此,和传统的模糊集概念相比,直觉模糊集能更有效地处理信息表中的不确定性和模糊性. 该模型自提出以来,众多学者不断扩展,成功地将其应用在深度学习、排序分类、情感分析、决策准则、图像融合等[3-6]领域.

粗糙集模型是 Pawlak[7]于 1982 年提出的处理不确定性、不一致性、不完整性的有效工具,旨在从不一致完备决策表中提取确定性规则和可能性规则. 近年来,许多学者在经典 Pawlak 粗糙集的基础上提出了优势粗糙集[8]、邻域粗糙集[9]、模糊粗糙集[10]等模型. 当前,这些理论模型也广泛应用于模式识别、知识发现[11-14]等领域. 属性约简[15-17]作为粗糙集的重要应用,力求在不改变知

基金项目:国家自然科学基金(61976245)
收稿日期:2022－09－26
* 通讯联系人,E-mail:chxuwh@gmail.com

识库分类和决策能力的同时,筛除表中冗余的属性,从而既不丢失必要信息又能降低决策的复杂程度.

然而,Pawlak粗糙集模型要求其所处理的分类必须完全精确,即只考虑完全“包含”或“不包含”. 针对此问题,Ziarko[18]于1993年提出变精度粗糙集模型,通过引入阈值β来放宽要求,考虑某种程度上的包含与否,进而提高模型分类的容错率. 目前,许多学者利用变精度粗糙集在各类关系下对属性约简进行深入研究,并取得了诸多成果[19-21].

在进行属性约简时总是将各个属性视作等权重这一习惯忽略了决策者自身的偏好,不符合实际情况,而属性加权根据各属性的重要程度赋予其不同的权重,可以更好地区分属性. 通常,权重可以通过主观经验、个人喜好来设置,也可以通过先验知识习得[22-24].

现实生活中,许多信息表受诸多因素影响是基于直觉模糊序关系的,而且是不协调的[25]. 为了更有效地从不协调直觉模糊序决策信息表中提取简洁的不确定性命题,同时提高对噪音数据的容纳能力,本文引入带权重评分函数,并利用变精度粗糙集进行属性约简,构建加权变精度直觉模糊序决策信息表. 接着,根据变精度上、下近似算子,引入近似函数、近似协调集和近似可辨识矩阵,进而得到近似约简的求解方法,并通过具体案例分析两种约简方法的有效性.

1 相关工作

决策表涉及条件属性和决策属性,为了更好地探究条件属性同决策属性之间的关系,便于理解,首先介绍相关概念[26-27].

三元组$IS=(U,AT,F)$是信息表,四元组$DIS=(U,AT\cup DT,F,G)$是决策表. 其中,$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是非空有限论域;$AT=\{a_1,a_2,\cdots,a_p\}$是有限条件属性集;$DT=\{d_1,d_2,\cdots,d_q\}$是决策属性集,并满足$AT\cap DT\neq\varnothing$;$F$是$U$与$AT$的笛卡尔积到$a$的有限值域$V_a$的映射,即$F=\{f: U\times AT\rightarrow V, V=\cup V_a, a\in AT\}$;$G$是论域$U$与$DT$的笛卡尔积到$d$的有限值域$V_d$的映射,即$G=\{g: U\times DT\rightarrow V, V=\cup V_d\}$.

对于一个信息表,如果属性a对应的值域满足偏序关系“$\succ_a$”,则$a\in AT$是一个准则. 若所有属性均为准则,此时该信息表称为序信息OIS表,记作$IS^{\succ}$. 所构成的偏序关系可以是递增或递减的偏序关系,为保证简洁性又不失一般性,本文主要研究由递增偏序关系所形成的准则.

在序信息表$IS^{\succ}$中,对$\forall x,y\in U$,“$y\succ_a x$”表示对象y在准则a下至少同对象x一样好,即$f(y,a)\succ_a f(x,a)$. $\forall A\subseteq AT, A\neq\varnothing$,“$y\succ_A x$”说明关于准则集$A$对象$y$至少同对象$x$一样好. 因此,对于$\forall a\in A,\forall x,y\in U$,属性集$A$的优势关系可以写为:

$$R_A^{\succ}=\{(x,y)\mid f(y,a)\succ_a f(x,a)\}$$

A的优势类为:

$$[x]_A^{\succ}=\{y\mid (x,y)\in R_A^{\succ}\}=\{y\mid f_a(y)\succ_a f_a(x)\}$$

对于序决策表$DIS=(U,AT\cup DT,F,G)$,若$\forall A\subseteq AT, D\subseteq DT$,则$R_A^{\succ}$与$R_D^{\succ}$称为$DIS$中条件属性集$A$和决策属性集$D$对应的优势关系. 此时该信息表称为序决策表$ODIS$,记作$DIS^{\succ}$.

下面给出变精度粗糙集的定义.

定义 1[28] 定义包含度$D\left(\frac{X}{Y}\right)=\frac{|X\cap Y|}{|Y|}$,$|X|$表示集合$X$的基数. 对决策精度$\beta\in(0.5,1]$,$1-\beta$表示错误分类率. 对$\forall X\subseteq U$,记$\underline{R_A^{\beta}}(X)$和$\overline{R_A^{\beta}}(X)$分别为集合$X$关于$A$的$\beta$下近似与$\beta$上近似,如式(1)和式(2)所示:

$$\underline{R_A^{\beta}}(X)=\left\{x\in U:D\left(\frac{X}{[x]_A}\right)\geqslant\beta\right\}=\cup\left\{[x]_A:D\left(\frac{X}{[x]_A}\right)\geqslant\beta\right\}\tag{1}$$

$$\overline{R_A^{\beta}}(X)=\left\{x\in U:D\left(\frac{X}{[x]_A}\right)>1-\beta\right\}=\cup\left\{[x]_A:D\left(\frac{X}{[x]_A}\right)>1-\beta\right\}\tag{2}$$

称$\underline{R_A^{\beta}}(X)$和$\overline{R_A^{\beta}}(X)$分别为基于$\beta$下近似和$\beta$上近似得到的粗糙集模型,即变精度粗糙集模型.

当 $\beta=1$ 时，$\underline{R_A^{\beta}}(X)=\underline{R_A}(X)$，$\overline{R_A^{\beta}}(X)=\overline{R_A}(X)$，因此变精度粗糙集模型可以视作经典Pawlak粗糙集的推广．类似经典Pawlak粗糙集，若 $\underline{R_A^{\beta}}(X)=\overline{R_A^{\beta}}(X)$，则在精度 β 下是精确的；若 $\underline{R_A^{\beta}}(X)\neq\overline{R_A^{\beta}}(X)$，则在精度 β 下是粗糙的．

接下来，为论述方便介绍直觉模糊集的相关概念，详见文献[26]．

四元组 $DIS=(U,AT\cup DT,F,G)$ 为决策信息表．集合 $\left\{IF=\left\{\mu_a(x),\nu_a(x)\,\middle|\,a\in AT,x\in U\right\}\right\}$ 是论域 U 上的一个直觉模糊集．定义直觉模糊数为 $f=\langle\mu_a(x),\nu_a(x)\rangle$，其中，$\mu_a$: $U\times a\rightarrow[0,1]$ 表示 U 中元素 x 在条件属性 a 下的隶属度；ν_a: $U\times a\rightarrow[0,1]$ 表示 U 中元素 x 在条件属性 a 下的非隶属度，并且，对于 $\forall x\in U$，均满足 $0\leqslant\mu_a(x)+\nu_a(x)\leqslant 1$．

进一步，定义 $\theta_a(x)$: $U\times a\rightarrow[0,1]$ 表示 U 中元素 x 在条件属性 a 下的犹豫度，并且，对于 $\forall x\in U$，均满足 $\mu_a(x)+\nu_a(x)+\theta_a(x)=1$．隶属度、非隶属度和犹豫度分别描述了对象 x 属于直觉模糊集的支持、反对、中立的程度．

此时，记 $IFIS=(U,AT,F)$ 是直觉模糊信息表．$IFDIS=(U,AT\cup DT,F,G)$ 是直觉模糊决策信息表．其中，非空有限论域 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$；有限条件属性集 $AT=\{a_1,a_2,\cdots,a_p\}$；有限决策属性集 $DT=\{d_1,d_2,\cdots,d_q\}$，并满足 $AT\cap DT\neq\varnothing$；$F=\{f: U\times AT\rightarrow V_{\mu a}\times V_{\nu a},a\in AT\}$，其中，$V_{\mu a}$ 和 $V_{\nu a}$ 分别为对象 x 在条件属性 a 下对应的隶属度值域和非隶属度值域．$G=\{g: U\times DT\rightarrow V_{\mu d}\times V_{\nu d},d\in DT\}$，其中，$V_{\mu d}$ 和 $V_{\nu d}$ 是对象 x 在决策属性 d 下对应的隶属度值域和非隶属度值域．

定义2[28]　四元组 $IFDIS=(U,AT\cup DT,F,G)$ 是直觉模糊决策信息表．对于 $\forall x\in U$，$\forall a\in AT$ 定义对象 x 对属性 a 的带权重评分函数，如式(3)所示：

$$S_a(x)=\omega_1\mu_a(x)-\omega_2\nu_a(x)-\omega_3\theta_a(x) \tag{3}$$

其中，$\mu_a(x)$，$\nu_a(x)$，$\theta_a(x)$ 分别表示元素 x 在属性 a 下的隶属度、非隶属度和犹豫度，权重系数满足 $\omega_1+\omega_2+\omega_3=1$，且 $0\leqslant\mu_a(x)+\nu_a(x)\leqslant 1$，$\mu_a(x)+\nu_a(x)+\theta_a(x)=1$．因此，带权重评分函数可进一步简化为：

$$S_a(x)=(1-\omega_2)\mu_a(x)+(\omega_3-\omega_2)\nu_a(x)-\omega_3$$

带权重评分函数可以视作对决策的正向反映，因而可以认为非隶属度和犹豫度反映的是各自对决策的阻碍程度，则在带权重评分函数中对二者赋予一个负数权重．

另外，权重系数的最终取值应体现与决策偏好的一致性．例如，评价者越看重隶属度，就需要适当提高其在带权重评分函数中的重要度，即增加 ω_1．特别地，由于各 ω_i 加和为1，故实际取值时只需给定隶属度和非隶属度的权重并保证 $\omega_1+\omega_2\leqslant 1$，就可以自动得到 ω_3 的取值．

将带权重评分函数与直觉模糊决策信息表相结合．若 $IFDIS$ 中的所有属性均为准则，则称该信息表为直觉模糊决策序信息表 $IFODIS$，$IFODIS=(U,AT\cup\{d\},F,G)$，记作 $IFIS^{\succ}$．直觉模糊序决策信息表 $IFIS^{\succ}$ 中的偏序关系可以表示为对于 $\forall f\in F$，$g\in G$，$a\in AT$ 以及 $\forall x,y\in U$，均有：

$$f(y,a)\geqslant f(x,a)\Leftrightarrow S_a(y)\geqslant S_a(x)$$

$$g(y,d)\geqslant g(x,d)$$

其中，$S_a(x)=\omega_1\mu_a(x)-\omega_2\nu_a(x)-\omega_3\theta_a(x)$ 为对象 x 对属性 a 的带权重评分函数；$f=\langle\mu_a(x),\nu_a(x)\rangle$ 和 $g=\langle\mu_d(x),\nu_d(x)\rangle$ 分别是对象 x 在条件属性 a 和决策属性 d 下的直觉模糊数．

定义3[28]　直觉模糊决策序信息表 $IFODIS$ 中，$\forall x,y\in U$，$\forall A\subseteq AT$，$AT\neq\varnothing$，$\forall a\in A$，定义属性集 A 所对应的优势关系为：

$$R_A^{s\succ}=\left\{(x,y)\,\middle|\,S_a(y)\geqslant S_a(x)\right\}$$

决策属性 d 所对应的优势关系为：

$$R_d^{s\succ}=\left\{(x,y)\,\middle|\,g(y,d)\geqslant g(x,d)\right\}$$

对于直觉模糊决策序信息表 $IFODIS$，若 $R_A^{s\succ}\subseteq R_d^{s\succ}$，则称该直觉模糊决策序信息表是协调的；反之，$R_A^{s\succ}\not\subset R_d^{s\succ}$，不协调．然而在实际生活中，需处理的信息表大多是不协调的．

根据定义3，对 $\forall x,y\in U$，$\forall a\in A$，属性集 A 的优势类为：

$[x]_A^{\succ}=\left\{y\left|(x,y)\in R_A^{s\succ}\right.\right\}=\left\{y\left|f_a(y)\geqslant f_a(x)\right.\right\}$

决策属性 d 的优势类为：

$[x]_d^{\succ}=\left\{y\left|(x,y)\in R_d^{s\succ}\right.\right\}$

2 不协调加权变精度直觉模糊序信息表的近似约简

基于变精度粗糙集、直觉模糊序信息表的相关理论，构建基于直觉模糊序信息表的变精度粗糙集模型．

定义 4 设 $IFODIS=(U,AT\cup\{d\},F,G)$ 是直觉模糊决策序信息表，对 $\forall A\subseteq AT,\forall X\subseteq U$ 及 $\beta\in(0.5,1]$，定义 X 在直觉模糊优序关系 $R_A^{s\succ}$ 关于 A 的 β 下近似和上近似，如式(4)所示：

$$\begin{aligned}\underline{R_A^{s\succ\beta}}(X)&=\left\{x\left|D\left(\frac{X}{[x]_A^{s\succ}}\right)\geqslant\beta\right.\right\}\\\overline{R_A^{s\succ\beta}}(X)&=\left\{x\left|D\left(\frac{X}{[x]_A^{s\succ}}\right)>1-\beta\right.\right\}\end{aligned}\tag{4}$$

与原有的上、下近似相比，决策精度 β 的引入放宽了下近似要求的同时，提高了上近似的条件．在此基础上对 $\forall A\subseteq AT,x\in U$，定义 $R_A^{s\succ\beta}$ 和 $R_d^{s\succ\beta}$ 分别为准则集 A 和 d 对应的 U 上的优势关系 $\dfrac{U}{R_A^{s\succ\beta}}=\left\{[x_i]_A^{s\succ}\right\},\dfrac{U}{R_d^{s\succ\beta}}=\{D_1,D_2,\cdots,D_r\}$．

记 $\sigma_A^{s\succ\beta}$ 和 $\lambda_A^{s\succ\beta}$ 分别为论域 U 上元素 x 关于准则集 A 的下近似函数和上近似函数，其定义如式(5)所示：

$$\begin{aligned}\sigma_A^{s\succ\beta}&=\left(\underline{R_A^{s\succ\beta}}(D_1),\underline{R_A^{s\succ\beta}}(D_2),\cdots,\underline{R_A^{s\succ\beta}}(D_r)\right)\\\lambda_A^{s\succ\beta}&=\left(\overline{R_A^{s\succ\beta}}(D_1),\overline{R_A^{s\succ\beta}}(D_2),\cdots,\overline{R_A^{s\succ\beta}}(D_r)\right)\end{aligned}\tag{5}$$

定义 5 设 $IFODIS=(U,AT\cup\{d\},F,G)$ 是直觉模糊决策序信息表，$\forall A\subseteq AT$，有：

若 $\sigma_A^{s\succ\beta}=\sigma_{AT}^{s\succ\beta}$，则称 A 是 β 下近似协调集．进一步，若 A 是 β 下近似协调集，但 A 的任意真子集均不是 β 下近似协调集，则称 A 是 β 下近似约简．

类似地，若 $\lambda_A^{s\succ\beta}=\lambda_{AT}^{s\succ\beta}$，则称 A 是 β 上近似协调集．进一步，若 A 是 β 上近似协调集，但 A 的任意真子集均不是 β 上近似协调集，则称 A 是 β 的上近似约简．

由定义 5 可知，β 上、下近似约简是保持每个决策类的 β 上、下近似不变的属性集，即在原信息表和约简表中，由同一个对象所产生的命题规则的决策相同．

定理 1 设 $IFODIS=(U,AT\cup\{d\},F,G)$ 是直觉模糊决策序信息表，$\forall A\subseteq AT,\forall x\in U$，若记：

$$\begin{aligned}K_A^{s\succ\beta}(x)&=\left\{D_j:x\in\underline{R_A^{s\succ\beta}}(D_j)\right\}\\T_A^{s\succ\beta}(x)&=\left\{D_j:x\in\overline{R_A^{s\succ\beta}}(D_j)\right\}\end{aligned}\tag{6}$$

则称：

(1)属性子集 A 是 β 下近似协调集 $\Leftrightarrow\forall x\in U$，均有 $K_A^{s\succ\beta}(x)=K_{AT}^{s\succ\beta}(x)$．

(2)属性子集 A 是 β 上近似协调集 $\Leftrightarrow\forall x\in U$，均有 $T_A^{s\succ\beta}(x)=T_{AT}^{s\succ\beta}(x)$．

证明 A 是 β 下近似协调集，则对任意 $j\in r$，有 $\underline{R_A^{s\succ\beta}}(D_j)=\underline{R_{AT}^{s\succ\beta}}(D_j)$．又对属性子集 A，$x\in\underline{R_A^{s\succ\beta}}(D_j)$ 等价于 $D_j\in K_A^{s\succ\beta}(x)$，对全集 AT，$x\in\underline{R_{AT}^{s\succ\beta}}(D_j)$ 等价于 $D_j\in K_{AT}^{s\succ\beta}(x)$，则证．

(2)与(1)同理可得．

下面给出变精度直觉模糊决策序信息表的上、下近似约简的判定定理．

定理 2 设 $IFODIS=(U,AT\cup\{d\},F,G)$ 是直觉模糊决策序信息表，$\forall A\subseteq AT$，对 $x,y\in U$，令 $D\left(\dfrac{D_i}{[x]_A^{s\succ\beta}}\right)=\alpha,D\left(\dfrac{[y]_A^{s\succ\beta}}{[x]_A^{s\succ\beta}}\right)=\eta$，则：

属性子集 A 是 β 下近似协调集 $\Leftrightarrow\forall D_i\in U/R_D^{\succ}$，当 $x\in\underline{R_{AT}^{s\succ\beta}}(D_i),y\notin\underline{R_{AT}^{s\succ\beta}}(D_i)$ 时，若 $\eta=0,\exists a\in A$，有 $S_a(x)>S_a(y)$；若 $\eta\neq0$，则当 $\dfrac{(\eta+\alpha-1)}{\eta}\geqslant\beta$ 时，$\exists a\in A,S_a(x)>S_a(y)$．

属性子集 A 是 β 上近似协调集 $\Leftrightarrow\forall D_i\in U/R_D^{\succ}$，当 $x\notin\underline{R_{AT}^{s\succ\beta}}(D_i),y\in\underline{R_{AT}^{s\succ\beta}}(D_i)$ 时，若 $\eta=0,\exists a\in A$，有 $S_a(x)>S_a(y)$；若 $\eta\neq0$，则当 $\dfrac{\eta}{(\eta+\alpha-1)}>1-\beta$ 时，$\exists a\in A,S_a(x)>S_a(y)$．

证明　对任意的$D_i \in U/R_D^{\succ}$，有：

$x \in \underline{R_{AT}^{s \succ \beta}}(D_i) \Leftrightarrow D_i \in K_{AT}^{s \succ \beta}(x)$

$y \notin \underline{R_{AT}^{s \succ \beta}}(D_i) \Leftrightarrow D_i \notin K_{AT}^{s \succ \beta}(y)$

首先证明必要性.

当$\eta = 0$时，$[y]_A^{s \succ \beta} \cap [x]_A^{s \succ \beta} = \varnothing$，则此时必存在$a \in A$，有$S_a(x) > S_a(y)$.

当$\eta \neq 0$时，假设$\exists D_0$，当$x \in \underline{R_{AT}^{s \succ \beta}}(D_i)$，$y \notin \underline{R_{AT}^{s \succ \beta}}(D_i)$时，对任意$a \in A$有$S_a(x) \leqslant S_a(y)$. 于是，此时有$y \in [x]_A^{s \succ}$. 由于$A$是下近似协调集，故对$D_i \in \dfrac{U}{R_D^{\succ}}$，有$\underline{R_{AT}^{s \succ \beta}}(D_i) = \underline{R_A^{s \succ \beta}}(D_i)$.

因为$x \in \underline{R_{AT}^{s \succ \beta}}(D_i)$，所以有$x \in \underline{R_A^{s \succ \beta}}(D_i)$，即$D\left(\dfrac{D_i}{[x]_A^{s \succ}}\right) = \alpha \geqslant \beta$. 又$y \in [x]_A^{s \succ}$，则$[y]_A^{s \succ} \subseteq [x]_A^{s \succ}$.

在最极端情况下，即当$\left([x]_A^{s \succ \beta} - D_i\right) \subseteq [y]_A^{s \succ \beta}$时，有：

$$D\left(\frac{D_i}{[y]_A^{s \succ}}\right) = \frac{\left|D_i \cap [y]_A^{s \succ}\right|}{\left|[y]_A^{s \succ}\right|} = (\eta + \alpha - 1) \times \frac{\left|[x]_A^{s \succ}\right|}{\left(\eta \times \left|[x]_A^{s \succ}\right|\right)} = \frac{(\eta + \alpha - 1)}{\eta} \geqslant \beta$$

当$\dfrac{(\eta + \alpha - 1)}{\eta} \geqslant \beta$时有$D\left(\dfrac{D_i}{[y]_A^{s \succ}}\right) \geqslant \beta$，即$y \in \underline{R_{AT}^{s \succ \beta}}(D_j)$，因此有$y \in \underline{R_A^{s \succ \beta}}(D_j)$，矛盾.

接下来证明充分性.

若A不是下近似协调集，则一定存在D_0，使得$\underline{R_{AT}^{s \succ \beta}}(D_0) \neq \underline{R_A^{s \succ \beta}}(D_0)$，即有$x_0$使$x_0 \in \underline{R_{AT}^{s \succ \beta}}(D_0)$，但$x_0 \notin \underline{R_A^{s \succ \beta}}(D_0)$. 则$D\left(\dfrac{D_0}{[x_0]_{AT}^{\succ}}\right) \geqslant \beta$，$D\left(\dfrac{D_0}{[x_0]_A^{\succ}}\right) < \beta$.

又$[x_0]_{AT}^{s \succ} \subseteq [x_0]_A^{s \succ}$，故存在$y_0$，有$y_0 \in [x_0]_A^{s \succ}$，但是$y_0 \notin D_0$，即$D\left(\dfrac{D_0}{[y_0]_{AT}^{\succ}}\right) < \beta$. 于是有$x_0 \in \underline{R_{AT}^{s \succ \beta}}(D_0)$，$y_0 \notin \underline{R_{AT}^{s \succ \beta}}(D_0)$. 根据条件可知存在$a \in A$，使得$S_a(x) > S_a(y)$，这与$y_0 \in [x_0]_A^{s \succ}$矛盾.

(2)同理(1)可得.

3　可辨识矩阵约简方法

上节给出了β上、下近似函数的定义和β上、下近似约简以及判定定理，由此可以进一步得到相应的属性约简方法. 为此，先给出β上、下近似可辨识属性集和β上、下近似可辨识属性矩阵.

定义 6　设$IFODIS = (U, AT \cup \{d\}, F, G)$是不协调直觉模糊决策序信息表，对$D_i \in \dfrac{U}{R_d^{s \succ \beta}}$记：

$$\begin{aligned} D_1^* &= \left\{(x, y): D_i \in K_{AT}^{s \succ \beta}(x), D_i \notin K_{AT}^{s \succ \beta}(y)\right\} \\ D_2^* &= \left\{(x, y): D_i \notin T_{AT}^{s \succ \beta}(x), D_i \in T_{AT}^{s \succ \beta}(y)\right\} \end{aligned} \tag{7}$$

对$a \in AT$，对$r = 1, 2$均有：

$Di_r^{s \succ \beta}(x, y) = \left\{S_a(x) > S_a(y) \middle| (x, y) \in D_r^*\right\}$

$Di_r^{s \succ \beta}(x, y) = \left\{\varnothing \middle| (x, y) \notin D_r^*\right\}$

则分别称$Di_1^{s \succ \beta}(x, y)$和$Di_2^{s \succ \beta}(x, y)$为对象关于直觉模糊优势关系的$\beta$下近似可辨识属性集和$\beta$上近似可辨识属性集. 分别记：

$Di_1^{s \succ \beta} = \left(Di_1^{s \succ \beta}(x, y) \middle| x, y \in U\right)$为不协调直觉模糊决策序信息表的$\beta$下近似可辨识矩阵；

$Di_2^{s \succ \beta} = \left(Di_2^{s \succ \beta}(x, y) \middle| x, y \in U\right)$为不协调直觉模糊决策序信息表的$\beta$上近似可辨识矩阵.

定理 3　设$IFODIS = (U, AT \cup \{d\}, F, G)$是不协调直觉模糊决策序信息表，对$A \subseteq AT$，有：

A是β下近似协调集$\Leftrightarrow \forall (x, y) \in D_1^{*\beta}$，有$A \cap Di_1^{s \succ \beta}(x, y) \neq \varnothing$；

A是β上近似协调集$\Leftrightarrow \forall (x, y) \in D_2^{*\beta}$，有$A \cap Di_2^{s \succ \beta}(x, y) \neq \varnothing$.

证明　首先证明必要性.

设A是下近似协调集，对于任意$(x, y) \in D_1^{*\beta}$，存在D_0，有$D_0 \in \dfrac{U}{R_d^{s \succ \beta}}$，使得$x \in \underline{R_{AT}^{s \succ \beta}}(D_0)$，$y \notin \underline{R_{AT}^{s \succ \beta}}(D_0)$. 故由定理2可知，必存在$a \in A$，使得$S_a(x) > S_a(y)$. 于是有$a \in Di_1^{s \succ \beta}(x, y)$. 因此若

A 是下近似协调集，则对 $\forall(x,y)\in D_1^{*\beta}$，有 $A\cap Di_1^{s\succ\beta}(x,y)\neq\varnothing$.

接下来证明充分性.

若对 $\forall(x,y)\in D_1^{*\beta}$，有 $A\cap Di_1^{s\succ\beta}(x,y)\neq\varnothing$，则存在 $a\in A$，使得 $a\in Di_1^{s\succ\beta}(x,y)$，故有 $S_a(x)>S_a(y)$. 而 $x\in\underline{R_{AT}^{s\succ\beta}}(D_i)$，$y\notin\underline{R_{AT}^{s\succ\beta}}(D_i)$. 故由定理2可知，$A$ 是下近似协调集.

(2)证明同(1).

定义7 设 $IFODIS=(U,AT\cup\{d\},F,G)$ 是不协调直觉模糊决策序信息表，$Di_1^{s\succ\beta}$ 和 $Di_2^{s\succ\beta}$ 分别为 β 下、上近似可辨识属性矩阵. 对 $a_k\in AT$，对 $r=1,2$，记 $Mi_1^{s\succ\beta}$ 和 $Mi_2^{s\succ\beta}$ 分别是 β 下近似辨识公式和 β 上近似辨识公式，有：

$$Mi_r^{s\succ\beta}=\wedge\left\{\vee\left\{a_k\in Di_r^{s\succ\beta}(x,y)\right\}\Big|x,y\in U\right\}=\wedge\left\{\vee\left\{a_k\in Di_r^{s\succ\beta}(x,y)\right\}\Big|x,y\in D_r^{*\beta}\right\}$$

定理4 设 $IFODIS=(U,AT\cup\{d\},F,G)$ 是不协调直觉模糊决策序信息表，对 $r=1,2$，辨识公式 $Mi_r^{s\succ\beta}$ 的极小析取范式为 $Mi_r^{s\succ\beta}=\vee_{k=1}^{n}(\wedge_{s=1}^{qk}a_{rs})$. 记 $A_{rk}=\{a_{rs}:s=1,2,\cdots,qk\}$，则 $\{A_{rk}:k=1,2,\cdots,n\}$ 分别是所有 β 下分布约简和 β 上分布约简形成的集合.

证明 此处仅证明 $\{A_{rk}:k=1,2,\cdots,n\}$ 是所有 β 下分布约简形成的集合. β 上分布约简同理可得.

对于任意 $k\leqslant n$ 和 $(x,y)\in D_1^{*\beta}$，由极小析取范式的定义可知 $A_{1k}\cap D_1^{s\succ\beta}(x,y)=\varnothing$；再由定理3可知，$A_{1k}$ 是下近似协调集. 同时，由 $Mi_1^{s\succ\beta}$ 可知当在 A_{1k} 中去掉一个元素形成 A'_{1k} 时，一定有 $(x,y)\in D_1^{*\beta}$，使得 $A'_{1k}\cap D_1^{s\succ\beta}(x,y)=\varnothing$. 因此 A'_{1k} 不是 β 下近似协调集，从而 A_{1k} 是 β 下近似约简.

又由于 β 下近似辨识公式中包含了所有的 $D_1^{s\succ\beta}(x,y)$，因此不存在其他 β 下近似约简.

4 案例分析

某信贷公司的10位评级员需要对申请贷款的六家公司进行联合评定，以判断是否对该公司进行放贷，评级员需要根据公司经营状况 a_1、信用状况 a_2 和偿债能力 a_3 三个方面对申贷公司进行评估. 评级员结合公司的财务数据和自身经验给出各公司指标的程度和情况，由于在评价申贷公司各方面状况和能力时均采用“良好”“较差”等模糊性用语，故采用直觉模糊集可以更精准地判断申贷公司是否为符合期望的申请者. 判断情况分 A,B,C 三种，即令人满意的申请者、尚可的申请者、不符合预期的申请者.

表1给出了10位评级员对六家公司的评定情况. 公司 x_1 在 a_1 下的得分解释如下：10位评级员，其中八位认为该公司经营状况良好，一位评级员认为该公司经营状况较差，还有一位评级员无法给出准确判断. 此时，认为公司 x_1 对经营状况 a_1 的隶属度是0.8，非隶属度是0.1，犹豫度是0.1，记作 $f(x_1,a_1)=(0.8,0.1)$. 类似地，可以对其他直觉模糊数进行解释. 此外，在得分函数中，由于更看重隶属度，故对其赋予更大的权重，此处设置权重为 $\omega_1=0.6,\omega_2=0.3,\omega_3=0.1$.

表1 加权变精度直觉模糊序决策信息表

Table 1 Weighted variable precision intuitionistic fuzzy ordered decision information system

U	a_1	a_2	a_3	d
x_1	(0.4,0.2)	(0.5,0.3)	(0.4,0.1)	A
x_2	(0.9,0.1)	(0.6,0.2)	(0.6,0.4)	B
x_3	(0.3,0.5)	(0.3,0.4)	(0.5,0.2)	C
x_4	(0.6,0.3)	(0.2,0.6)	(0.8,0.1)	B
x_5	(0.8,0.1)	(0.7,0.2)	(0.5,0.3)	A
x_6	(0.9,0)	(0.4,0.4)	(0.7,0)	C

为了便于后续计算加权变精度直觉模糊序决策信息表中的上、下近似约简，在表2中计算了每个对象在各个属性下的带权重评分函数.

取 $\beta=0.8$，根据表2可以得到：

$U/R_d^{s\succ0.8}=\{D_1,D_2,D_3\}$

$D_1=\{x_1,x_5\}$

$D_2=\{x_1,x_2,x_4,x_5\}$

$D_3=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$

$[x_1]_{AT}^{s\succ0.8}=\{x_1,x_2,x_5\}$

$[x_2]_{AT}^{s\succ0.8}=\{x_2\}$

$[x_3]_{AT}^{s\succ0.8}=\{x_2,x_3,x_6\}$

$[x_4]_{AT}^{s\succ0.8}=\{x_4\}$

表2 基于加权变精度直觉模糊序决策信息表(表1)的得分函数

Table 2 Weighted score function based on Table 1

U	a_1	a_2	a_3	d
x_1	0.14	0.19	0.16	A
x_2	0.51	0.28	0.24	B
x_3	0.01	0.03	0.21	C
x_4	0.26	−0.08	0.44	B
x_5	0.44	0.35	0.19	A
x_6	0.53	0.1	0.39	C

$[x_5]_{AT}^{s\succ 0.8}=\{x_5\}$

$[x_6]_{AT}^{s\succ 0.8}=\{x_6\}$

显然$R_{AT}^{s\succ 0.8}\not\subset R_d^{s\succ 0.8}$,则该信息表不协调,计算得:

$\underline{R_{AT}^{s\succ 0.8}}(D_1)=\{x_5\}$

$\underline{R_{AT}^{s\succ 0.8}}(D_2)=\{x_1,x_2,x_4,x_5\}$

$\underline{R_{AT}^{s\succ 0.8}}(D_3)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$

$\overline{R_{AT}^{s\succ 0.8}}(D_1)=\{x_1,x_5\}$

$\overline{R_{AT}^{s\succ 0.8}}(D_2)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$

$\overline{R_{AT}^{s\succ 0.8}}(D_3)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$

方法一:首先利用判定定理求解约简后的属性.

若取$A=\{a_2,a_3\}$,则:

$\underline{R_A^{s\succ 0.8}}(D_1)=\{x_5\}$

$\underline{R_A^{s\succ 0.8}}(D_2)=\{x_1,x_2,x_4,x_5\}$

$\underline{R_A^{s\succ 0.8}}(D_3)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$

$\overline{R_A^{s\succ 0.8}}(D_1)=\{x_1,x_5\}$

$\overline{R_A^{s\succ 0.8}}(D_2)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$

$\overline{R_A^{s\succ 0.8}}(D_3)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$

即$\sigma_{AT}^{s\succ 0.8}=\sigma_A^{s\succ 0.8}$,说明$A=\{a_2,a_3\}$是下近似协调集.验证可知,$A$的任意真子集均不为下近似协调集,所以$A$是下近似约简.

同理可得,当$A=\{a_2,a_3\}$或$\{a_1,a_3\}$时,$\lambda_{AT}^{s\succ 0.8}=\lambda_A^{s\succ 0.8}$,且$A$的任意真子集均不为上近似协调集,所以$A=\{a_2,a_3\}$或$A=\{a_1,a_3\}$是上近似约简.

方法二:根据表1的加权变精度直觉模糊序决策信息表,可以分别得到该信息表的下近似辨识矩阵和上近似辨识矩阵,如表3和表4所示.

表3 表1的下近似辨识矩阵

Table 3 The lower approximation identification matrix of Table 1

U	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	$\varnothing$	$\varnothing$	$a_{1,2}$	$\varnothing$	$\varnothing$	a_2
x_2	$\varnothing$	$\varnothing$	$a_{1,2,3}$	$\varnothing$	$\varnothing$	a_2
x_3	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
x_4	$\varnothing$	$\varnothing$	$a_{1,3}$	$\varnothing$	$\varnothing$	a_3
x_5	$a_{1,2,3}$	a_2	$a_{1,2}$	$a_{1,2}$	$\varnothing$	a_2
x_6	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

表4 表1的上近似辨识矩阵

Table 4 The upper approximation identification matrix of Table 1

U	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
x_2	$a_{1,2,3}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$a_{1,3}$	$\varnothing$
x_3	a_3	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	a_3	$\varnothing$
x_4	$a_{1,3}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	a_3	$\varnothing$
x_5	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
x_6	$a_{1,3}$	$a_{1,3}$	$a_{1,2,3}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$\varnothing$

$$Mi_1^{s\succ 0.8}= a_2\wedge a_3\wedge(a_1\vee a_3)\wedge(a_1\vee a_2)\wedge(a_1\vee a_2\vee a_3)= a_2\wedge a_3$$

$$Mi_2^{s\succ 0.8}= a_3\wedge(a_1\vee a_3)\wedge(a_1\vee a_2)\wedge(a_1\vee a_2\vee a_3)= a_3\wedge(a_1\vee a_2)=(a_3\wedge a_1)\vee(a_3\wedge a_2)$$

因此,方法一和方法二所得到的约简结果是一致的.

5 数值实验

本节根据辨识矩阵求解约简属性的方法进行实验算法的设计,给出下近似、上近似约简的伪代码,详见算法1、算法2以及对应的数值实验.

算法1 加权变精度直觉模糊序信息表的下近似约简算法

输入:信息表$IFODIS=(U,AT\cup\{d\},F,G)$,决策精度$\beta$

输出:加权变精度直觉模糊序信息表的下近似约简集red

1. 初始化$red\leftarrow\varnothing$
2. 计算带权重评分函数

$$S_a(x)=\omega_1\mu_a(x)-\omega_2\nu_a(x)-\omega_3\theta_a(x)$$

```
3.  for i = 1 to |U| do:
4.    pre = ∅
5.    for j = 1 to |U| do
6.    if S(x_i) ≤ S(x_j) then do:
7.      pre ← x_j
8.      end if
9.    end for
10.   Pre = Pre ∪ pre
11. end for
12. for i = 1 to |U| do:
13.   d = ∅
14.   for j = 1 to |U| do:
15.     if d(x_i) ≤ d(x_j) then do:
16.       d ← x_j
17.     end if
18.   end for
19.   D = D ∪ d
20. end for
21. for i = 1 to |U| do:
22.   xred = ∅
23.     for j = 1 to |U| do:
24.       if Pre[i] = ∅ then do:
25.         degree = 0
26.       else:
27.         degree = len(Pre[i] ∩ D[j]) / len(Pre[i])
28.       if degree ≥ β then do:
29.         xred ← x_i
30.       end if
31.     end for
32.     xred = xred ∪ xred[i]
33. end for
34. for m = 1 to |U| do:
35.   Dred = ∅
36.   for i = 1 to |U| do:
37.     for j = 1 to |U| do:
38.       if x_i ∈ xred(m) and x_j ∉ xred(m) then do:
39.         for p = 1 to |AT| do:
40.           if S(x_ip) > S(x_jp) then do:
41.           Dred ← a_p
42.         end for
43.       end if
44.     end for
45.   end for
46.   R = R ∪ Dred
47. end for
48. red是R的极小析取范式
49. end
```

算法2 加权变精度直觉模糊序信息表的上近似约简算法

输入：信息表 $IFODIS=(U, AT\cup\{d\}, F, G)$，决策精度 β

输出：加权变精度直觉模糊序信息表的上近似约简集 red

```
1.  与算法1中的1～20相同
2.  for i = 1 to |U| do:
3.    sred = ∅
4.    for j = 1 to |U| do:
5.      if Pre[i] = ∅ then do:
6.        degree = 0
7.      else:
8.        degree = len(Pre[i] ∩ D[j]) / len(Pre[i])
9.      if degree > 1 − β then do:
10.         sred ← x_i
11.     end if
12.   end for
13.   sred = sred ∪ sred[i]
14. end for
15. for m = 1 to |U| do:
16.   Ured = ∅
17.   for i = 1 to |U| do:
18.     for j = 1 to |U| do:
19.       if x_i ∉ sred(m) and x_j ∈ sred(m) then do:
20.         for p = 1 to |AT| do:
21.           if S(x_ip) > S(x_jp) then do:
22.             Dred ← a_p
23.           end if
24.         end for
25.       end if
26.     end for
27.   end for
28.   R = R ∪ Ured
29. end for
30. red是R的极小析取范式
31. end
```

从UCI数据库中选取九个数据集以验证下近似约简和上近似约简方法的有效性，数据集相关信息见表5.

使用的计算机CPU为i5-11300H，内存为16 GB，Windows 11操作系统．实验程序采用Python 3.7. 为进一步说明实验的有效性，将下近似约简算法VDR、上近似约简算法VUR与MR[29]进行比较，分别在KNN，SVM，BayesNet，RandomTree四个分类器上对约简结果进行分类，得到对应的分类精度如表6和表7所示．

由表可见，根据算法1和算法2求得的下近似约简和上近似约简结果，在KNN，SVM，BayesNet和RandomTree这四种分类器上的分类精度均在一个比较高的程度，并且九个数据集得到的平均分类精度均优于对比算法．说明本文所提出的算法不仅具有一定的可信度，还在原有算法上有所改进提升．

表5　实验中使用的数据集概述

Table 5　The description of datasets used in experiments

数据集	简称	样本数	属性数	分类数
Wine	Wine	178	13	3
Seeds	Seeds	210	7	3
Heart Failure Clinical records	Heart	299	13	2
Forest Fires	Forest	517	13	2
Wisconsin Diagnostic Breast Cancer	Wdbc	569	31	2
Australian Credit	Aust	690	14	2
German Credit	German	1000	20	2
Maternal Health	Health	1014	7	3
Cardiotocography	Card	2093	21	3

表6　不同算法在KNN和SVM上的分类精度

Table 6　Comparative classification results of three algorithms on KNN and SVM

数据集	KNN			SVM		
	VDR	VUR	MR	VDR	VUR	MR
Wine	**98.33%±5.00%**	96.33%±7.37%	96.00%±0.64	**96.33%±7.37%**	96.00%±8.00%	96.00%±0.64%
Seeds	94.05%±7.32%	**95.48±6.94%**	92.38%±7.66%	95.48%±6.94%	**96.90%±6.21%**	91.91%±8.12%
Heart	**82.22%±14.23**	73.33%±7.37%	81.11%±12.22%	76.67%±13.56%	71.11%±7.37%	**83.33%±12.42%**
Forest	91.96%±6.59%	**97.14%±5.71%**	**97.14%±5.71%**	94.46%±6.79%	92.86%±9.58%	**98.75%±3.75%**
Wdbc	**94.74%±5.55%**	94.12%±5.88%	93.01%±6.29%	**95.88%±4.59%**	92.94%±5.76%	93.56%±5.55%
Aust	**87.45%±5.37%**	**87.48%±5.37%**	70.67%±10.42%	**85.95%±9.47%**	82.55%±10.54%	73.02%±8.64%
German	70.33%±5.47%	**73.33%±2.98%**	72.00%±8.59%	**73.00%±1.00%**	**73.00%±1.00%**	72.00%±3.27%
Health	**64.62%±8.83%**	64.26%±6.03%	61.63%±6.57%	**67.86%±7.46%**	67.20%±7.59%	67.20%±7.59%
Card	87.61%±4.20%	**88.09%±3.67%**	84.81%±3.17%	88.41%±3.57%	**88.87%±3.52%**	47.49%±2.97%
Average	**85.70%±6.96%**	85.50%±5.70%	83.19%±6.81%	**86.01%±6.75%**	84.61%±6.62%	84.47%±5.89%

表7　不同算法在BayesNet和RandomTree上的分类精度

Table 7　Comparative classification results of three algorithms on BayesNet and RandomTree

数据集	BayesNet			RandomTree		
	VDR	VUR	MR	VDR	VUR	MR
Wine	**95.00%±4.99%**	93.00%±7.37%	90.98%±2.18%	98.00%±8.19%	**98.33%±7.37%**	92.67%±1.74%
Seeds	95.48%±6.94%	96.9%±7.9%	**97.14%±5.71%**	**96.67%±7.64%**	95.00%±8.12%	93.81%±7.62%
Heart	83.33%±12.62%	82.22%±10.48%	**87.78%±20.76%**	**89.96%±3.18%**	88.89%±7.45%	82.22%±11.60%
Forest	**97.14%±5.71%**	**97.14%±5.71%**	94.46%±6.55%	**98.75%±9.01%**	98.57%±9.46%	95.71%±6.8%
Wdbc	**95.88%±3.90%**	95.39%±4.88%	90.03%±5.44%	96.47%±5.29%	**97.06%±6.34%**	91.80%±4.88%
Aust	**82.67%±7.03%**	**82.67%±7.05%**	72.55%±10.18%	**88.40%±6.69%**	87.43%±5.98%	75.41%±5.73%
German	67.47%±4.16%	**69.33%±5.78%**	68.00%±8.14%	73.33%±12.83%	**76.33%±14.59%**	70.33%±5.59%
Health	61.69%±6.28%	**62.01%±7.51%**	**62.01%±6.96%**	74.39%±6.67%	74.73%±9.30%	**76.42%±9.30%**
Card	**74.59%±3.63%**	74.44%±3.48%	72.89%±4.18%	**92.47%±5.12%**	91.20%±5.74%	84.59%±4.73%
Average	**83.72%±6.14%**	83.68%±6.69%	81.76%±7.79%	**89.83%±7.18%**	89.82%±8.26%	84.85%±5.89%

6 结论

本文以直觉模糊决策信息表为背景，借助带权重评分函数定义了直觉模糊序决策信息表．同时，为了提高模型分类的容错率，引入变精度粗糙集，构建加权变精度直觉模糊序信息表．在此信息表下引入近似约简的概念，并得到不协调信息表上、下近似约简的判定定理和可辨识矩阵，进而给出两种求解上、下近似约简的方法．最后，通过具体案例和数值实验证实了方法的可行性和有效性．

参考文献

[1] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems，1986，20(1)：87－96.

[2] Zadeh L A. Fuzzy sets. Information and Control，1965，8(3)：338－353.

[3] 那日萨，孔茸，高欢．基于深度学习的直觉模糊集隶属度确定方法．运筹与管理，2022，31(2)：92－98.（Na R S，Kong R，Gao H. Deep learning-based determination method for membership degree in intuitionistic fuzzy sets. Operations Research and Management Science，2022，31(2)：92－98.）

[4] Deng Y，Ren Z Q，Kong Y Y，et al. A hierarchical fused fuzzy deep neural network for data classification. IEEE Transactions on Fuzzy Systems，2017，25(4)：1006－1012.

[5] Zhang D，Li Y L，Wu C. An extended TODIM method to rank products with online reviews under intuitionistic fuzzy environment. Journal of the Operational Research Society，2020，71(2)：322－334.

[6] 戴文战，王琪．基于 PCNN 与 IFS 的可见光与红外图像融合方法．光电子·激光，2020，31(7)：738－744.（Dai W Z，Wang Q. Research on fusion method of visible and infrared image based on PCNN and IFS. Journal of Optoelectronics·Laser，2020，31(7)：738－744.）

[7] Pawlak Z. Rough sets. International Journal of Computer & Information Sciences，1982，11(5)：341－356.

[8] Greco S，Matarazzo B，Slowinski R. Rough approximation of a preference relation by dominance relations. European Journal of Operational Research，1999，117(1)：63－83.

[9] Yao Y Y. Relational interpretations of neighborhood operators and rough set approximation operators. Information Sciences，1998，111(1－4)：239－259.

[10] Dubois D，Prade H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets. International Journal of General Systems，1990，17(2－3)：191－209.

[11] Chen X W，Xu W H. Double - quantitative multigranulation rough fuzzy set based on logical operations in multi - source decision systems. International Journal of Machine Learning and Cybernetics，2022，13(4)：1021－1048.

[12] Che X Y，Mi J S，Chen D G. Information fusion and numerical characterization of a multi-source information system. Knowledge-Based Systems，2018，145：121－133. DOI：10.1016/j.knosys.2018.01.008.

[13] 王江荣，黄建华，罗资琴，等．基于粗糙集的Logistic 回归模型在矿井突水模式识别中的应用．煤田地质与勘探，2015，43(6)：70－74.（Wang J R，Huang J H，Luo Z Q，et al. Application of logistic regression model based on rough set in recognition of mine water inrush pattern. Coal Geology & Exploration，2015，43(6)：70－74.）

[14] Sang B B，Chen H M，Yang L，et al. Incremental attribute reduction approaches for ordered data with time-evolving objects. Knowledge-Based Systems，2021(212)：106583. DOI：10.1016/j.knosys.2020.106583.

[15] 林冰雁，徐伟华，杨倩．带偏好度量的直觉模糊序决策信息系统的部分一致约简．计算机科学，2018，45(1)：148－151，187.（Lin B Y，Xu W H，Yang Q. Partially consistent reduction in intuitionistic fuzzy ordered decision information systems with preference measure. Computer Science，2018，45(1)：148－151，187.）

[16] Chen Y M，Zeng Z Q，Zhu Q X，et al. Three-way decision reduction in neighborhood systems. Applied Soft Computing，2016(38)：942－954. DOI：10.1016/j.asoc.2015.10.059.

[17] 龙柄翰，徐伟华，张晓燕．不协调目标信息系统中基于改进差别信息树的分布属性约简．计算机科学，2019，46(S1)：115－119.（Long B H，Xu W H，Zhang X Y. Distribution attribute reduction based on improved discernibility information tree in inconsistent system. Computer Science，2019，46(S1)：115－119.）

[18] Ziarko W. Variable precision rough set model. Journal of Computer and System Sciences, 1993, 46(1): 39－59.

[19] Chen Y Y, Chen Y M. Feature subset selection based on variable precision neighborhood rough sets. International Journal of Computational Intelligence Systems, 2021, 14(1): 572－581.

[20] Chen P P, Lin M L, Liu J H. Multi-label attribute reduction based on variable precision fuzzy neighborhood rough set. IEEE Access, 2020(8): 133565－133576. DOI: 10.1109/ACCESS. 2020. 3010314.

[21] 陈子春，秦克云. 区间值信息系统在变精度相容关系下的属性约简. 计算机科学，2009，36(3)：163－166. (Chen Z C, Qin K Y. Attribute reduction of interval-valued information system based on variable precision tolerance relation. Computer Science, 2009, 36(3): 163－166.)

[22] Hu M, Tsang E C C, Guo Y T, et al. A novel approach to attribute reduction based on weighted neighborhood rough sets. Knowledge - Based Systems, 2021(220): 106908.

[23] Xie X J, Qin X L, Yu C Q, et al. Test-cost-sensitive rough set based approach for minimum weight vertex cover problem. Applied Soft Computing, 2018(64): 423－435. DOI: 10.1016/j. asoc. 2017. 12.023.

[24] Aggarwal M. Probabilistic variable precision fuzzy rough sets. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2016, 24(1): 29－39.

[25] 徐伟华，张文修. 基于优势关系下的协调近似空间. 计算机科学，2005，32(9)：164－165. (Xu W H, Zhang W X. Consistent approximation spaces based on dominance relations. Computer Science, 2005, 32(9): 164－165.)

[26] 徐泽水. 直觉模糊信息集成理论及应用. 北京：科学出版社，2008.

[27] 徐伟华. 序信息系统与粗糙集. 北京：科学出版社，2013.

[28] 张文修，梁怡，吴伟志. 信息系统与知识发现. 北京：科学出版社，2003.

[29] 陈德刚，徐伟华，李金海，等. 粒计算基础教程. 北京：科学出版社，2019.

（责任编辑　杨可盛）