

DOI:10.13232/j.cnki.jnju.2022.03.013

多尺度单值中智系统中基于优势粗糙集模型的最优尺度选择与约简

王文珏, 黄 兵*

(南京审计大学信息工程学院, 南京, 211815)

摘 要:单值中智集是处理不确定、不一致信息的有效工具,结合单值中智粗糙集和多尺度决策系统,提出基于优势关系的多尺度单值中智粗糙集模型的最优尺度选择和约简算法. 首先,在构建基于优势关系的多尺度单值中智粗糙集模型时引入正理想点、负理想点和不确定点来刻画单值中智数大小关系;其次,结合证据理论中的信任函数和似然函数给出模型的最优尺度选择算法及约简算法;最后,利用五组 UCI 数据集对文中提出的模型与算法进行实例验证,分析算法的有效性. 提出的算法在分类精度和算法效率两方面都有所提高,进一步扩展了单值中智粗糙集在多尺度决策系统下的应用,为后续该领域的研究提供参考.

关键词:多尺度,尺度约简,单值中智粗糙集,最优尺度选择,证据理论

中图分类号:TP18

文献标志码:A

Optimal scale selection and reduction based on dominant rough set model in multi-scale single-valued neutrosophic systems

Wang Wenjue, Huang Bing*

(School of Information Engineering, Nanjing Audit University, Nanjing, 211815, China)

Abstract: Single-valued neutrosophic sets are effective tools to deal with uncertain and inconsistent information. Combined with single-valued neutrosophic rough set and multi-scale decision systems, this paper proposes the optimal scale selection and reduction algorithms based on multi-scale single-valued neutrosophic dominance rough set model. First, when constructing multi-scale dominant single-valued neutrosophic rough set model, we use the ideal positive point, ideal negative point and most uncertain point to describe the dominance relationship between neutrosophic numbers. Second, combining with the belief function and plausibility function in evidence theory, we examine the optimal scale selection algorithm and reduction algorithm of the presented model. Third, we utilize five groups of UCI datasets to verify the model and algorithm proposed in this paper, and analyze the effectiveness of the algorithm. The algorithm proposed in this paper improves the classification accuracy and algorithm efficiency, and furtherly expands the application of single-valued neutrosophic rough set in multi-scale decision-making system, which provides a reference for subsequent research in this field.

Key words: multi-scale, scale reduction, single-valued neutrosophic rough sets, optimal scale selection, evidence theory

粗糙集理论是由 Pawlak^[1]提出的针对不精确、不完备信息处理问题的数学工具. 随后,针对

经典粗糙集中存在的局限性,专家学者们相继提出模糊粗糙集^[2]、直觉模糊粗糙集^[3]、区间直觉模

基金项目:江苏省高校自然科学研究项目(20KJA520006),江苏省研究生科研与实践创新计划(KYCX21_1946)

收稿日期:2022-01-19

* 通讯联系人, E-mail:hbhuangbing@126.com.

模糊粗糙集^[4]、优势模糊粗糙集^[5]、单值中智粗糙集^[6]等扩展模型.

针对经典粗糙集理论无法处理优势关系这一问题,1999年 Greco et al^[5]提出优势粗糙集理论(Dominance-based Rough Sets Approach, DRSA), DRSA 弥补了经典粗糙集理论的不足并在之后的研究中得到了广泛应用. 黄兵^[7]及江效尧和黄兵^[8]将优势关系与区间直觉模糊集结合,构建了优势区间直觉模糊粗糙集模型,并将其运用于信息系统设计风险判断. 李佳等^[9]利用属性重要度对优势度排序,解决并列的多属性决策排序问题.

由于一维隶属度表征的模糊信息无法解决大多数不确定性问题,因此学者们进一步提出直觉模糊集和中智集的概念. 在 Smarandache^[10]首次提出中智集概念后, Dai et al^[11]又进一步提出单值中智集的概念. 此后,各国学者开始研究单值中智数的排序方法. Ye^[12]对单值中智集的余弦相似度的公式进行了优化,进而比较单值中智数的大小. Huang et al^[13]则结合现有的排序方法,利用相对距离有利度和相对相似度对单值中智集排序.

针对单一尺度分析的信息系统不能解决复杂的信息处理问题, Wu and Leung^[14]提出多尺度信息系统概念,并由 Li and Hu^[15]进一步改进. 在多尺度信息系统中,最优尺度选择一直都是研究的核心问题. 例如,吴伟志等^[16-18]利用证据理论中的似然函数和信任函数对最优尺度组合进行刻画;陈应生等^[19-20]利用矩阵对尺度组合进行刻画;郑嘉文等^[21]利用熵定义最优尺度,最后提出了基于熵的最优尺度选择;张清华等^[22]从尺度代价和属性代价这两个不同的角度来刻画,并将尺度与属性代价结合,从而建立基于代价敏感的多尺度决策系统来选择最优尺度.

尽管多尺度系统和单值中智集的研究和应用能更好地处理复杂的信息问题以及更全面地描述系统信息,但目前针对多尺度决策系统环境下的单值中智粗糙集研究并不常见. 因此,本文基于 Huang et al^[13]的相对距离有利度构建基于优势关系的多尺度单值中智粗糙集模型,并根据模型给出最优尺度选择和最优尺度约简算法. 本文提出的算法以多尺度单值中智数据为研究对象,在分

类精度和时间效率上都有所提高,且进一步扩展了单值中智粗糙集在多尺度决策系统下的应用,为后续该领域的研究提供参考.

1 预备知识

本节介绍单值中智集以及多尺度决策系统的基本概念,同时引入证据理论.

1.1 单值中智集

定义 1^[23] 设 U 为论域,在 U 上的一个单值中智集 A 由真值隶属度函数 $T_A(x)$ 、不确定隶属度函数 $I_A(x)$ 以及假值隶属度函数 $F_A(x)$ 组成,可表示为 $A = \{ \langle x, T_A(x), I_A(x), F_A(x) \rangle \mid x \in U \}$. 其中, $T_A(x): U \rightarrow [0, 1]$, $I_A(x): U \rightarrow [0, 1]$, $F_A(x): U \rightarrow [0, 1]$. 同时,将论域 U 上单值中智集 A 的元素称为单值中智数(SVNN),单值中智集记为 SVNS,并给出如下性质:

$$\forall A, B \in \text{SVNS}(U), A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in U, \\ T_A(x) \leq T_B(x), I_A(x) \geq I_B(x), F_A(x) \geq F_B(x)$$

在对给定的两个单值中智数比较大小时, Huang et al^[13]提出将单值中智数与理想正点、理想负点、最不确定点之间的欧式距离作为单值中智数大小关系判定的依据.

定义 2^[13] 对于单值中智数 $x = \langle T_x, I_x, F_x \rangle$, 令 $M_g(x)$ 作为基于 x 的相对距离有利度, $D(x, y)$ 表示 x 与 y 之间的欧式距离. 同时,引入理想正点 $\langle 1, 0, 0 \rangle$ 、理想负点 $\langle 0, 1, 1 \rangle$ 、最不确定点 $\langle 0, 1, 0 \rangle$, x 离理想正点越近,离理想负点和最不确定点越远,则 x 越有利. 因此将相对距离有利度表示为:

$$M_g(x) = D(x, \langle 0, 1, 1 \rangle) + \\ D(x, \langle 0, 1, 0 \rangle) - D(x, \langle 1, 0, 0 \rangle)$$

结合距离公式可以得到:

$$M(x) = \sqrt{T_x^2 + (I_x - 1)^2 + (F_x - 1)^2} + \\ \sqrt{T_x^2 + (I_x - 1)^2 + F_x^2} - \\ \sqrt{(T_x - 1)^2 + I_x^2 + F_x^2}$$

显然, $M(x) \in [1 - \sqrt{3}, \sqrt{3} + \sqrt{2}]$. 因此, 令 $x = (T_i, I_i, F_i), y = (T_k, I_k, F_k)$ 为是两个单值中

智数,则它们的大小关系判定如下:若 $M(x) \leq M(y)$, 则 $x \leq y$.

1.2 多尺度决策系统 本节引入多尺度决策系统的概念.

定义3^[14] 设属性集合为 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, 论域 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $S = (U, A)$ 为一个多尺度信息表, a_j 有 $I_j (1 \leq j \leq m)$ 个尺度, 则 S 可以表示为:

$$(U, \{a_j^k | k=1, 2, \dots, I_j, j=1, 2, \dots, m\})$$

其中, $a_j^k: U \rightarrow V_j^k$, V_j^k 指属性 a_j^k 在第 k 个尺度下的值域. 当 $1 \leq k \leq I_j - 1$, $x \in U$, $\exists g_j^{k, k+1}: V_j^k \rightarrow V_j^{k+1}$, 使得 $a_j^{k+1} = g_j^{k, k+1} \circ a_j^k$, 即 $a_j^{k+1}(x) = g_j^{k, k+1}(a_j^k(x))$, 且 $g_j^{k, k+1}$ 是粒度转化函数.

定义4^[24-25] 令 $S = (U, A)$ 为多尺度信息表的元组, 论域 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 属性 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, 且 a_j 有 $I_j (j=1, 2, \dots, m)$ 个尺度, 则分处在不同 I_j 阶层的属性 a_1, a_2, \dots, a_m 构成一个单尺度信息表 $S^K = (U, A^K)$, 其中 $K = (l_1, l_2, \dots, l_m)$, $A^K = \{a_1^{l_1}, a_2^{l_2}, \dots, a_m^{l_m}\}$, 索引集 K 称为 S 中 S^K 的尺度组合, 记 S 的全体尺度组合 $l = \{(l_1, l_2, \dots, l_m) | 1 \leq l_j \leq I_j, j=1, 2, \dots, m\}$, $K \in l$.

定义5^[24-25] 设 $D = (U, C \cup \{d\})$ 为多尺度决策表, 其中 (U, C) 为多尺度信息表, 且 $d \notin C$, 则 $d: U \rightarrow V_d$ 为决策属性.

1.3 证据理论

定义6^[26] 设 $S^K = (U, A^K, d)$ 为多尺度决策表 S 的一个单尺度决策表, 对 $X \subseteq U$, $Y \subseteq U$, 且 $Y \neq \emptyset$, 则 $P(X|Y) = \frac{|X \cap Y|}{|Y|}$. $Bel_{A^K}(X)$ 与 $Pl_{A^K}(X)$

分别为论域 U 的信任函数和似然函数, 定义为:

$$\begin{aligned} Bel_{A^K}(X) &= P(\underline{R}_{A^K}(X)) = \\ &= \frac{|\underline{R}_{A^K}(X)|}{|U|} = \sum_{A \subseteq X} m_{A^K}(A) \\ Pl_{A^K}(X) &= P(\overline{R}_{A^K}(X)) = \\ &= \frac{|\overline{R}_{A^K}(X)|}{|U|} = \sum_{A \cap X \neq \emptyset} m_{A^K}(A) \end{aligned}$$

其中, 对应的 $mass$ 函数为:

$$m_{A^K}(X) = \begin{cases} P(X) = \frac{|X|}{|U|}, & X \in U/R_{A^K} \\ 0, & X \notin U/R_{A^K} \end{cases}$$

依据决策属性 d 划分的等价类为 D_i , 因此令:

$$\begin{aligned} Bel_{A^K}(d) &= \sum_{D_i \in U/d} Bel_{A^K}(D_i) = \sum_{D_i \in U/d} \frac{|R_{A^K}(D_i)|}{|U|} \\ Pl_{A^K}(d) &= \sum_{D_i \in U/d} Pl_{A^K}(D_i) = \sum_{D_i \in U/d} \frac{|\overline{R}_{A^K}(D_i)|}{|U|} \end{aligned}$$

2 多尺度优势单值中智粗糙集

2.1 优势单值中智粗糙集模型

定义7 令 $S = \{U, A, V, f\}$, 其中 $A = C \cup D$, C 为条件属性集合, $D = \{d\}$ 是决策属性集合, 且 $C \cap D = \emptyset$. 对于 $\forall x \in U, a \in A, V = \cup V_a, V_a$ 为属性 a 的值域. f 则表示为对象与属性值的映射, 即 $f: U \times (C \cup D) \rightarrow V$, 且 $f(x, c), f(x, d)$ 分别表示 x 在条件属性 c 、决策属性 d 下的取值. 若 $f(x, c) = \langle T_c, I_c, F_c \rangle$, 则称 S 为单值中智模糊信息系统, 记作 SVNFS.

定义8 设 $DSVNFS = \{U, C \cup D, V, f\}$, $x \in U$, 则条件属性子集 $B \subseteq C$ 下的优势关系为:

$$R_B^{\geq} = \{(x, y) \in U \times U | f(x, b) \leq f(y, b), \forall b \in B\}$$

优势类为:

$$[x]_B^{\geq} = \{y \in U | (x, y) \in R_B^{\geq}\}$$

其中, $f(x, b) \leq f(y, b)$ 表示对象 y 在属性 b 下取值大于 x 在属性 b 下的取值, 即 y 优于 x , 其中 f 取值的大小判断通过定义2的相关内容确定.

同理, 可以定义劣势类为:

$$[x]_B^{\leq} = \{y \in U | (y, x) \in R_B^{\geq}\}$$

f 的大小关系同样可以通过定义2确定.

定义9 设 $DSVNFS = \{U, C \cup D, V, f\}$, 依据决策属性 d 划分等价类为 $U/\{d\} = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$, 即 $D_i \in U/\{d\}$, 此时,

$$\begin{aligned} D_1 &< D_2 < \dots < D_n \\ D_i^{\leq} &= \bigcup_{1 \leq k \leq i} D_k (1 \leq i \leq n) \\ D_i^{\geq} &= \bigcup_{i \leq k \leq n} D_k (1 \leq i \leq n) \end{aligned}$$

则由 $B \subseteq C$ 确定的下、上近似的定义如下:

$$\begin{aligned}\underline{B}_d(D_i^{\geq}) &= \{x \in U \mid [x]_B^{\geq} \subseteq D_i^{\geq}\} \\ \overline{B}_d(D_i^{\geq}) &= \{x \in U \mid [x]_B^{\leq} \cap D_i^{\geq} \neq \emptyset\} = \bigcup_{x \in D_i^{\leq}} [x]_B^{\leq} \\ BND_B(D_i^{\geq}) &= \overline{B}_d(D_i^{\geq}) - \underline{B}_d(D_i^{\geq}) \\ \underline{B}_d(D_i^{\leq}) &= \{x \in U \mid [x]_B^{\leq} \subseteq D_i^{\leq}\} \\ \overline{B}_d(D_i^{\leq}) &= \{x \in U \mid [x]_B^{\geq} \cap D_i^{\leq} \neq \emptyset\} = \bigcup_{x \in D_i^{\leq}} [x]_B^{\geq} \\ BND_B(D_i^{\leq}) &= \overline{B}_d(D_i^{\leq}) - \underline{B}_d(D_i^{\leq})\end{aligned}$$

2.2 多尺度优势单值中智粗糙集模型

定义 10 设多尺度优势单值中智模糊信息系统 (U, A, F) , 其中论域 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 为非空条件属性集合, $\forall a_j \in A$ 都具有 $I_j (1 \leq j \leq m)$ 个尺度指标, 即属性 a_j 的 I_j 个尺度为 $a_j^1, a_j^2, \dots, a_j^{I_j}$. 同时, $f_{a_j}: U \rightarrow P_0(V_{a_j^k})$, 其中, $V_{a_j^k}$ 表示属性 a_j^k 的值域 $(1 \leq k \leq I_j - 1)$, $F = \{f_{a_j^k} \mid k = 1, 2, \dots, I_j, j = 1, 2, \dots, m\}$, 且 $\exists g_{a_j^{k,k+1}}: V_{a_j^k} \rightarrow V_{a_j^{k+1}}$, 使 $f_{a_j^{k+1}} = g_{a_j^{k,k+1}} \circ f_{a_j^k}$, 即 $f_{a_j^{k+1}}(x) = g_{a_j^{k,k+1}}(f_{a_j^k}(x))$, 且 $g_{a_j^{k,k+1}}$ 是粒度转化函数.

设 $MS-DSVNDS = (U, A, F, d, g)$ 为多尺度优势单值中智模糊决策系统, 其中 (U, A, F) 为多尺度优势单值中智模糊信息系统, d 为决策属性集合, $g: U \rightarrow P_0(V_d)$, V_d 为决策属性 d 的值域.

定义 11 记 $K_1 = (l_1^1, l_1^2, \dots, l_1^m)$, $K_2 = (l_2^1, l_2^2, \dots, l_2^m)$, 若对 $\forall j = 1, 2, \dots, m$ 有 $l_j^1 \leq l_j^2$, 则称尺度 K_1 细于尺度 K_2 , 记作 $K_1 \leq K_2$. 若 $K_1 \leq K_2$ 且 $\exists j = 1, 2, \dots, m$ 有 $l_j^1 < l_j^2$, 则称尺度 K_1 严格细于尺度 K_2 , 记作 $K_1 < K_2$. 并得到以下定义:

$$\begin{aligned}K_1 = K_2 &\Leftrightarrow l_j^1 = l_j^2, 1 \leq j \leq m \\ K_1 \leq K_2 &\Leftrightarrow l_j^1 \leq l_j^2, 1 \leq j \leq m \\ K_1 < K_2 &\Leftrightarrow K_1 \leq K_2 \wedge K_1 \neq K_2 \\ K_1 \wedge K_2 &= (\min(l_1^1, l_2^1), \min(l_1^2, l_2^2), \dots, \min(l_1^m, l_2^m)) \\ K_1 \vee K_2 &= (\max(l_1^1, l_2^1), \max(l_1^2, l_2^2), \dots, \max(l_1^m, l_2^m))\end{aligned}$$

其中 $K_0 = (1, 1, \dots, 1)$ 为最细尺度, (I_1, I_2, \dots, I_m) 则为最粗尺度.

定义 12 设 $MS-DSVNDS = (U, A, F, d, g)$, $\forall a_j \in A$ 具有 $I_j (1 \leq j \leq m)$ 个尺度指标. 设 l 为全

体尺度组合的集合, 令 K 记为系统的一个尺度组合, 则 K 对应的一个单尺度优势单值中智模糊决策系统为 S^K . $R_{A^K}^{\geq} (1 \leq k \leq I_j)$ 为系统在尺度组合 $K = (l_1, l_2, \dots, l_m) (1 \leq l_j \leq I_j, 1 \leq j \leq m)$ 下由属性集 A 导出的一个优势关系, 表示为:

$$R_{A^K}^{\geq} = \{(x, y) \mid (x, y) \in U \times U, f(x, a_j^{l_j}) \leq f(y, a_j^{l_j})\}$$

这里 f 的取值大小也由定义 2 确定. 优势类记为:

$$[x]_{R_{A^K}^{\geq}}^{\geq} = \{y \in U \mid (x, y) \in R_{A^K}^{\geq}\}$$

劣势类则记为:

$$[x]_{R_{A^K}^{\leq}}^{\leq} = \{y \in U \mid (y, x) \in R_{A^K}^{\geq}\}$$

对于 $D_i \in U/\{d\}$, $K \in l$, 由 D_i 导出的下、上近似表示如下:

$$\begin{aligned}\underline{R}_{A^K}(D_i^{\geq}) &= \{x \in U \mid [x]_{R_{A^K}^{\geq}}^{\geq} \subseteq D_i^{\geq}\} \\ \overline{R}_{A^K}(D_i^{\geq}) &= \{x \in U \mid [x]_{R_{A^K}^{\leq}}^{\leq} \cap D_i^{\geq} \neq \emptyset\} \\ \underline{R}_{A^K}(D_i^{\leq}) &= \{x \in U \mid [x]_{R_{A^K}^{\leq}}^{\leq} \subseteq D_i^{\leq}\} \\ \overline{R}_{A^K}(D_i^{\leq}) &= \{x \in U \mid [x]_{R_{A^K}^{\geq}}^{\geq} \cap D_i^{\leq} \neq \emptyset\}\end{aligned}$$

因此对于 $D_i \in U/\{d\}$, 令尺度组合 K 下的信任函数和似然函数为:

$$\begin{aligned}Bel_{A^K}(d) &= \sum_{D_i \in U/d} Bel_{A^K}(D_i^{\geq}) = \sum_{D_i \in U/d} \frac{|R_{A^K}(D_i^{\geq})|}{|U|} \\ Pl_{A^K}(d) &= \sum_{D_i \in U/d} Pl_{A^K}(D_i^{\geq}) = \sum_{D_i \in U/d} \frac{|\overline{R}_{A^K}(D_i^{\geq})|}{|U|}\end{aligned}$$

2.3 多尺度优势单值中智粗糙集模型最优尺度选择 在讨论多尺度优势单值中智决策系统 $MS-DSVNDS$ 的最优尺度选择算法时, 根据文献[26]可知最优尺度选择的基本算法: 若 $\exists K_1 \in l$, 使 S^{K_1} 是协调的, 且对 $\forall K_2 \in l, K_1 < K_2$ 时 S^{K_2} 是不协调的, 那么使系统协调的最优尺度组合为 K_1 .

定义 13 设 $S = (U, A, F, d, g)$ 为单值中智决策系统, $K = (l_1, l_2, \dots, l_m)$ 为多尺度决策系统的尺度组合, $K_0 = (1, 1, \dots, 1)$, 单尺度决策系统 S^K 关于 $MS-DSVNDS$ 协调和最优尺度组合的定义如下:

(1) 若 S^K 是关于 S 信任协调, 即 $Bel_{A^K}(d) = Bel_{A^{K_0}}(d)$, 且对任意的 K' 满足 $K < K' (K' \in l)$, K' 均不信任协调, 则 K 为信任最优尺度组合;

(2) 若 S^K 是关于 S 似然协调, 即 $Pl_{A^K}(d) = Pl_{A^{K_0}}(d)$, 且对任意的 K' 满足 $K < K' (K' \in l)$, K' 均不似然协调, 则 K 为似然最优尺度组合.

据定义 13 设计多尺度优势单值中智决策系统信任最优尺度选择算法, 如算法 1 所示.

算法 1 MS-DSNVDS 信任最优尺度选择算法

输入: 多尺度优势单值中智决策系统 MS-DSNVDS = (U, A, F, d, g) , 其中 A 为非空属性集 $\{a_j^k | k = 1, 2, \dots, I_j, j = 1, 2, \dots, m\}$, $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $K_0 = \{1, 1, \dots, 1\}$, m 为条件属性个数, I_j 为尺度指标数量.

输出: MS-DSNVDS 的信任最优尺度组合

Step 1. 令 $M = l = \{(l_1, l_2, \dots, l_m) | 1 \leq l_j \leq I_j, 1 \leq j \leq m\}$;
 Step 2. 计算 $Bel_{A^{K_0}}(d)$;
 Step 3. 对 $\forall K \in M$, 分别计算 $Bel_{A^K}(d)$; 若 $Bel_{A^K}(d) \neq Bel_{A^{K_0}}(d)$, 对 $\forall K' \in M$, 若 $K \leq K'$, 则 $M = M \setminus \{K'\}$;
 Step 4. 对 $\forall K \in M, \exists K' \in M$ 使 $K' < K$, 则 $M = M \setminus \{K'\}$;
 Step 5. 输出 MS-DSNVDS 所有的信任最优尺度组合 M .

算法 1 利用信任函数来判断系统是否信任协调, 其中信任函数的计算依据定义 12. 首先通过遍历所有尺度组合找出使系统不信任协调的尺度组合 K , 并用定义 11 中定义的偏序关系从 M 中删

去自身和严格粗于 K 的尺度组合, 最后再次遍历剩余尺度组合找出严格细于这次遍历中的 K 的所有尺度组合 K' 来不断缩小搜索空间并得到最优尺度组合. 该算法的主要思想是逐步删去不是最优的和使系统不协调的尺度组合, 最后得到最优尺度组合. 经计算可得, 算法的时间复杂度为 $O\left(n^2 \prod_{j=1}^m I_j\right)$, 其中尺度总数为 $\prod_{j=1}^m I_j$, $O(n^2)$ 为判断系统是否信任协调的时间复杂度. 计算最差的时间复杂度为计算所有尺度下的信任函数, 即算法 1 的时间复杂度.

同理可得 MS-DSNVDS 似然最优尺度选择算法.

将算法 1 运用到风险控制系统中得到例 1.

例 1 表 1 给出多尺度优势单值中智决策系统 MS-DSNVDS = (U, A, F, d, g) . 该系统是一个风险控制系统的实例, 其中 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_{10}\}$ 为 10 个审计案例, 而非空属性集合 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ 分别为数据的可靠性、系统控制、系统环境, 其中数据可靠性有三个尺度, 系统控制有两个尺度, 系统环境有两个尺度. 决策属性 $d = 1$ 表示系统风险控制效果差, $d = 2$ 则表示系统存在较大风险, $d = 3$ 表示系统风险控制效果不错. $\langle T_x, I_x, F_x \rangle$ 表示在该属性尺度下审计案例 x 与属性 a_j^k 之间的真隶属度、不确定隶属度和假隶属度.

表 1 多尺度优势单值中智决策系统

Table 1 Multi-scale dominant single-valued neutrosophic decision system

U	a_1^1	a_1^2	a_1^3	a_2^1	a_2^2	a_3^1	a_3^2	d
x_1	$\langle 0.4, 0.5, 0.3 \rangle$	$\langle 0.5, 0.4, 0.3 \rangle$	$\langle 0.5, 0.3, 0.2 \rangle$	$\langle 0.4, 0.5, 0.4 \rangle$	$\langle 0.5, 0.4, 0.2 \rangle$	$\langle 0.8, 0.2, 0.3 \rangle$	$\langle 0.8, 0.1, 0.2 \rangle$	2
x_2	$\langle 0.3, 0.4, 0.3 \rangle$	$\langle 0.5, 0.4, 0.3 \rangle$	$\langle 0.5, 0.3, 0.2 \rangle$	$\langle 0.4, 0.5, 0.4 \rangle$	$\langle 0.5, 0.4, 0.1 \rangle$	$\langle 0.6, 0.1, 0.3 \rangle$	$\langle 0.7, 0.1, 0.2 \rangle$	1
x_3	$\langle 0.3, 0.4, 0.4 \rangle$	$\langle 0.5, 0.4, 0.2 \rangle$	$\langle 0.5, 0.3, 0.2 \rangle$	$\langle 0.4, 0.4, 0.4 \rangle$	$\langle 0.5, 0.4, 0.1 \rangle$	$\langle 0.8, 0.1, 0.2 \rangle$	$\langle 0.8, 0.1, 0.2 \rangle$	1
x_4	$\langle 0.7, 0.3, 0.2 \rangle$	$\langle 0.7, 0.2, 0.2 \rangle$	$\langle 0.8, 0.1, 0.1 \rangle$	$\langle 0.4, 0.5, 0.2 \rangle$	$\langle 0.5, 0.4, 0.2 \rangle$	$\langle 0.9, 0.1, 0.2 \rangle$	$\langle 0.9, 0.1, 0.2 \rangle$	3
x_5	$\langle 0.4, 0.6, 0.3 \rangle$	$\langle 0.5, 0.4, 0.2 \rangle$	$\langle 0.5, 0.3, 0.2 \rangle$	$\langle 0.7, 0.3, 0.3 \rangle$	$\langle 0.8, 0.2, 0.2 \rangle$	$\langle 0.9, 0.1, 0.2 \rangle$	$\langle 0.9, 0.1, 0.2 \rangle$	3
x_6	$\langle 0.7, 0.3, 0.2 \rangle$	$\langle 0.7, 0.2, 0.2 \rangle$	$\langle 0.8, 0.1, 0.1 \rangle$	$\langle 0.7, 0.3, 0.2 \rangle$	$\langle 0.8, 0.2, 0.1 \rangle$	$\langle 0.8, 0.1, 0.2 \rangle$	$\langle 0.8, 0.1, 0.2 \rangle$	2
x_7	$\langle 0.4, 0.5, 0.3 \rangle$	$\langle 0.5, 0.4, 0.2 \rangle$	$\langle 0.5, 0.3, 0.2 \rangle$	$\langle 0.4, 0.5, 0.3 \rangle$	$\langle 0.5, 0.4, 0.2 \rangle$	$\langle 0.8, 0.2, 0.3 \rangle$	$\langle 0.8, 0.1, 0.2 \rangle$	2
x_8	$\langle 0.3, 0.6, 0.4 \rangle$	$\langle 0.4, 0.4, 0.3 \rangle$	$\langle 0.5, 0.3, 0.2 \rangle$	$\langle 0.4, 0.6, 0.3 \rangle$	$\langle 0.5, 0.5, 0.2 \rangle$	$\langle 0.7, 0.2, 0.2 \rangle$	$\langle 0.8, 0.1, 0.2 \rangle$	2
x_9	$\langle 0.1, 0.8, 0.5 \rangle$	$\langle 0.3, 0.6, 0.3 \rangle$	$\langle 0.4, 0.5, 0.1 \rangle$	$\langle 0.1, 0.8, 0.4 \rangle$	$\langle 0.2, 0.7, 0.3 \rangle$	$\langle 0.4, 0.5, 0.3 \rangle$	$\langle 0.5, 0.5, 0.2 \rangle$	1
x_{10}	$\langle 0.4, 0.6, 0.3 \rangle$	$\langle 0.5, 0.4, 0.2 \rangle$	$\langle 0.5, 0.3, 0.2 \rangle$	$\langle 0.7, 0.3, 0.2 \rangle$	$\langle 0.8, 0.2, 0.1 \rangle$	$\langle 0.9, 0.1, 0.2 \rangle$	$\langle 0.9, 0.1, 0.2 \rangle$	3

根据定义 2 对对应的单值中智数进行比较从而建立优势关系(其中相对距离有利度取小数点四位),如表 2 所示.

设 $K_0=(1, 1, 1)$, $K_1=(2, 1, 1)$, $K_2=(1, 2, 1)$, $K_3=(2, 2, 1)$. 其中:

$$U/d=\{\{x_2, x_3, x_9\}, \{x_1, x_6, x_7, x_8\}, \{x_4, x_5, x_{10}\}\}$$

(1)令:

$$M=l=\{(l_1, l_2, \dots, l_m) | 1 \leq l_j \leq I_j, 1 \leq j \leq m\}$$

(2)计算 $Bel_{A^{K_0}}(d)$:

$$Bel_{A^{K_0}}(d) = \sum_{D_i \in U/d} \frac{|R_{A^{K_0}}(D_i^{\geq})|}{|U|} = 1 + \frac{6}{10} + \frac{3}{10} = \frac{19}{10}$$

(3)分别对 $\forall K \in M$, 计算 $Bel_{A^K}(d)$:

$$Bel_{A^{K_1}}(d) = \sum_{D_i \in U/d} \frac{|R_{A^{K_1}}(D_i^{\geq})|}{|U|} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{17}{10} \neq \frac{19}{10}$$

$$Bel_{A^{K_2}}(d) = \sum_{D_i \in U/d} \frac{|R_{A^{K_2}}(D_i^{\geq})|}{|U|} = 1 + \frac{6}{10} + \frac{3}{10} = \frac{19}{10}$$

$$Bel_{A^{K_3}}(d) = \sum_{D_i \in U/d} \frac{|R_{A^{K_3}}(D_i^{\geq})|}{|U|} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{17}{10} \neq \frac{19}{10}$$

因此需将尺度集合 M 中比尺度 K_1 粗的尺度组合删去,同时删去 K_1 . 共有 12 个尺度组合,循环遍历共删掉八个尺度组合,剩下尺度组合 $K_0, K_2, K_4=(1, 1, 2), K_5=(1, 2, 2)$. 再计算剩下的尺度组合,得到的尺度组合 K_4 与尺度组合 K_5 的单尺度信息表是信任协调的,保留这四个尺度组合.

(4) $\forall K \in M$, 存在 $K_0 < K_2 < K_5$, 则从尺度组合集合 M 中去除 K_0, K_2 ; 又存在 $K_4 < K_5$, 则删去 K_4 , 到此遍历结束.

(5)此时,尺度组合 M 只剩下最优尺度 $K_5=(1, 2, 2)$.

表 2 基于相对距离有利度多尺度优势单值中智决策系统

Table 2 Multi-scale dominant single-valued neutrosophic decision system based on relative distance preference degree

U	a_1^1	a_1^2	a_1^3	a_2^1	a_2^2	a_3^1	a_3^2	d
x_1	0.8191	1.1784	1.4415	0.7550	1.2534	2.0886	2.3663	2
x_2	0.8442	1.1784	1.4415	0.7550	1.3310	1.9010	2.1763	1
x_3	0.7810	1.2534	1.4415	0.9381	1.3310	2.3663	2.3663	1
x_4	1.8137	1.9998	2.4667	0.8893	1.2534	2.5468	2.5468	3
x_5	0.6403	1.2534	1.4415	1.7272	2.1881	2.5468	2.5468	3
x_6	1.8137	1.9998	2.4667	1.8137	2.2815	2.3663	2.3663	2
x_7	0.8191	1.2534	1.4415	0.8191	1.2534	2.0886	2.3663	2
x_8	0.4163	1.0050	1.4415	0.6403	1.0677	1.9998	2.3663	2
x_9	-0.2084	0.4738	0.9652	-0.1703	0.1519	0.8191	1.0677	1
x_{10}	0.6403	1.2534	1.4415	1.8137	2.2815	2.5468	2.5468	3

2.4 多尺度优势单值中智粗糙集模型最优尺度约简 Zhang et al^[27]将属性约简看成特殊的尺度选择,当 $J=0$ 时表示属性约简和最优尺度选择是同时进行的, $J=1$ 则表示只进行最优尺度选择,并通过哈斯图计算边界域的极大元来优化算法. 其算法的主要思想是令某属性的粒度为 0, 固定其他属性不变, 逐渐增加属性粒度直至系统协调, 最后重复操作得到最优尺度约简. 该算法本质上

通过减少检查系统协调性次数来提高算法效率, 本节将讨论多尺度优势单值中智粗糙集模型尺度约简算法.

定义 14 设 $MS-DSVNDS=(U, A, F, d, g)$, $A=\{a_j^k | k=1, 2, \dots, I_j, j=1, 2, \dots, m\}$, $K_0=(1, 1, \dots, 1)$, $l_j=0$ 表示该尺度下的属性 a_j 被删除, ζ 为全体尺度组合, 若尺度组合 $C=(l_1, l_2, \dots, l_m)$

($0 \leq l_j \leq I_j$)满足:

(1)若 S^C 是关于 S 信任协调,即 $Bel_{A^C}(d) = Bel_{A^{K_0}}(d)$,且对任意删去一个属性后对应的尺度组合 $C'(C' \in \zeta)$ 总有 $Bel_{A^C}(d) \neq Bel_{A^{K_0}}(d)$,则称为信任最优尺度约简.

(2)若 S^C 是关于 S 似然协调,即 $Pl_{A^C}(d) = Pl_{A^{K_0}}(d)$,且对任意删去一个属性后对应的尺度组合 $C'(C' \in \xi)$,总有 $Pl_{A^C}(d) \neq Pl_{A^{K_0}}(d)$,则称为似然最优尺度约简.

算法2 MS-DSVNS 信任最优尺度约简算法

输入:多尺度优势单值中智决策系统 MS-DSVNS = (U, A, F, d, g) , 其中 A 为非空属性集 $\{a_j^k | k = 1, 2, \dots, I_j, j = 1, 2, \dots, m\}$, $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $K_0 = \{1, 1, \dots, 1\}$, m 为条件属性个数, I_j 为尺度指标数量, $I = (I_1, I_2, \dots, I_m)$.

输出:MS-DSVNS 的信任最优尺度约简 K_t .

Step 1. 令 $R(A) = A$ 且 $K_t = \{1, 1, \dots, 1\} = K_0$.

Step 2. 计算 $Bel_{A^{K_0}}(d)$.

Step 3. 对 $\forall a_j \in R(A)$, 令 $l_j = 0 (1 \leq j \leq m)$ 时, 分别计算 $Bel_{A^{K(l_j)}}(d)$; 若 $Bel_{A^{K_t}}(d) = Bel_{A^{K(l_j)}}(d)$, 则 $K_t = K_t(l_j)$, $R(A) = R(A) \setminus \{a_j\}$; 否则 $l_j = I_j (l_j \leq I_j)$. 若 $Bel_{A^{K_t}}(d) = Bel_{A^{K(l_j)}}(d)$, 则令 $K_t = K_t(l_j)$, $R(A) = R(A) \setminus \{a_j\}$, 否则令 $l_j = l_j - 1$.

Step 4. 输出 MS-DSVNS 的信任最优尺度约简 K_t .

算法2中,若每个 a_j 在删去该属性后的系统是信任协调的,则表示可以从该尺度组合中删去该属性;若删去后系统不信任协调,则此时该进行的操作是找到该尺度组合下能使系统信任协调达到最高层次的尺度.依次对所有属性进行上述操作,就能得到该系统信任最优尺度约简.经计算

可得,该算法的时间复杂度为 $O\left(n^2 \sum_{j=1}^m I_j\right)$, 其中 $O(n^2)$ 为判断系统信任协调的时间复杂度,其与样本总数有关,且算法通过对每个属性分别进行计算而得到结果,则计算次数最多为各属性尺度指标数量之和,由此可得算法时间复杂度.

同理可得 MS-DSVNS 的似然最优尺度约简.

例2 根据例1的实例可运用算法2从而得到信任最优尺度约简如下:

(1)令:

$$R(A) = A = \{a_1, a_2, a_3\}, K_t = \{1, 1, 1\} = K_0$$

$$(2) Bel_{A^{K_t}}(d) = \sum_{D_i \in U/d} \frac{|R_{A^{K_t}}(D_i^{\geq})|}{|U|} = 1 + \frac{6}{10} + \frac{3}{10} = \frac{19}{10}$$

(3) $\forall a_j \in R(A)$, 令 $l_j = 0$, 计算 $Bel_{A^{K(l_1)}}(d)$:

$$Bel_{A^{K(l_1)}}(d) = \sum_{D_i \in U/d} \frac{|R_{A^{K(l_1)}}(D_i^{\geq})|}{|U|} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{17}{10} \neq \frac{19}{10}$$

此时, $Bel_{A^{K_t}}(d) \neq Bel_{A^{K(l_1)}}(d)$, 则不删属性 a_1 . 令该属性粒度 $l_1 = 3$, 由例1可知不是信任协调的, 因此令 $l_j = l_j - 1$ 直至 $l_1 = 1$ 使系统协调.

$$Bel_{A^{K(l_2)}}(d) = \sum_{D_i \in U/d} \frac{|R_{A^{K(l_2)}}(D_i^{\geq})|}{|U|} = 1 + \frac{6}{10} + \frac{3}{10} = \frac{19}{10}$$

由于 $Bel_{A^{K_t}}(d) = Bel_{A^{K(l_2)}}(d)$, 故删去属性 a_2 ,

此时令 $l_2 = 0$ 则 $K_t = (1, 0, 1)$. 同理可得:

$$Bel_{A^{K(l_3)}}(d) = \sum_{D_i \in U/d} \frac{|R_{A^{K(l_3)}}(D_i^{\geq})|}{|U|} = 1 + \frac{2}{10} = \frac{12}{10} \neq \frac{19}{10}$$

故令 $l_3 = 2$, 此时系统信任协调. 因此, 最后得到信任最优尺度约简为 $K_t = (1, 0, 2)$.

3 实验

为了对多尺度单值中智粗糙集的最优尺度选择算法和约简算法进行有效性验证, 本文抽取了五个数据集, 分别为 Iris, Wine, Glass, Somerville Happiness Survey 和 Algerian Forest Fires, 数据集的具体信息如表3所示. 本节中模型的构建以及算法的实现以 Somerville Happiness Survey 数据集为例, 图1为该数据集可视化, 且算法运行的软件环境是 Matlab R2020b.

表 3 预处理后的 UCI 数据集信息

Table 3 Information of preprocessed UCI datasets

编号	数据集	样本数	条件属性	尺度	类别
1	Iris	150	4 (3,2,2,3)		3
2	Wine	178	13 (3,2,2,3,3,1,2,3,2,3,3,1,2)		3
3	Glass	214	9 (3,2,2,3,3,1,2,3,2)		6
4	Happiness	143	6 (3,1,2,3,2,2)		2
5	Fire	244	10 (3,2,3,3,1,2,3,2,2,3)		2

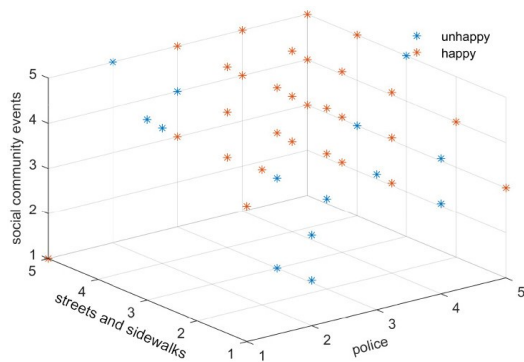


图 1 Happiness 数据集可视化

Fig. 1 Visualization of Happiness dataset

Somerville Happiness Survey 数据集共有六个条件属性和一个决策属性. 决策属性分为不快乐和快乐两类, 分别将这两类赋值为 0, 1, 其中 $d=0$ 共有 66 个样本, $d=1$ 共有 77 个样本. 六个条件属性则为城市服务信息可用性、住房成本、公立学校的整体质量、对当地警察的信任、街道和人行横道的维护、社区活动可用性, 这六个属性的值都为 1~5. 本实验利用数据集样本之间的优劣关系得到数据集的最优尺度, 以下为实验过程:

首先需对 Somerville Happiness Survey 数据集完成多尺度决策系统与单值中智粗糙集的构

建, 在构建多尺度决策系统时依据 Hao et al^[28]提出的方法, 即利用属性值所属不同的区间值划分尺度较粗的评价标准, 并利用区间的合并再进一步划分尺度更粗的评价标准. 本节实验划分区间值时将 $\left[\frac{i-1}{4}(V_{\max}-V_{\min}), \frac{i}{4}(V_{\max}-V_{\min})\right]$ ($i=1, 2, \dots, 4$) 作为 4 值区间, $V_{\max}-V_{\min}$ 为属性值的最大值减去最小值之后的属性值跨度, 并通过将 4 值区间进一步合并为 2 值区间构建下一个层级的尺度系统, 最后得到多尺度系统. 本实验中将条件属性的尺度设定为 (3, 1, 2, 3, 2, 2), 如表 3 所示. 在构建单值中智粗糙集时将各属性值与该属性列的最大值、平均值、最小值之间的欧式距离作为标准来确定肯定度、犹豫度和否定度, 然后将归一化处理后的距离与 1 相减得到的绝对值作为数据集中该属性的肯定度、犹豫度和否定度, 并以定义 2 中的相对距离有利度作为评价单值中智数优劣关系的标准, 得到各样本的优势类.

其次, 基于本文提出的算法 2 对前面构建的模型进行实验. 第一步是对尺度组合初始化, 即令 $K_i=K_0=\{1, 1, \dots, 1\}$, 并求出在最细尺度下的信任函数值. 第二步, 分别对各个条件属性进行约简, 能否约简的判断标准为在删除该属性后构建的模型是否协调. 若不能约简, 则从最粗粒度开始, 找出能使决策系统协调的最粗粒度. 在这六个条件属性依次完成约简后, 最后得到的约简尺度组合为 (0, 0, 0, 3, 2, 2).

最后, 将本文算法与 Li and Hu^[15] 的 LM 算法进行对比, 其结果如表 4 所示. 显然, 本文的算法在运行时间上有很大的优势, 在处理条件属性较多的数据集时优势更明显.

表 4 本文算法与 LM 算法在五个数据集上得到的最优尺度结果

Table 4 Optimal scale results of our algorithm and LM algorithm on five datasets

编号	数据集	最优尺度	运行时间(s)	
			本文算法	LM 算法
1	Iris	(3,1,1,1)	0.37431	0.47409
2	Wine	(2,1,0,1,0,0,0,1,2,0,1,1,1)	13.50124	7640.03485
3	Glass	(1,1,0,1,1,1,1,0,1)	13.79049	682.80907
4	Happiness	(0,0,0,3,2,2)	0.56521	1.18480
5	Fire	(0,0,0,0,1,1,1,0,0,1)	0.42037	25.89407

表5为五个UCI数据集利用KNN算法在原始数据集与本文算法得到的分类精度,图2则为Glass数据集的原始数据集与本文算法分类精度对比图.可以看出,和原有数据集相比,本文算法的分类精度有明显的提高.因此,通过本文提出的模型算法能够有效地解决多尺度优势单值中智决策系统的属性约简与尺度选择问题,并有效地提高时间效率和分类精度,减少冗余属性.

表5 原始数据集与本文算法在五个UCI数据集上的分类精度比较

Table 5 Classification accuracy of original dataset and our algorithm on UCI datasets

编号	数据集	分类精度		本文算法约简后条件属性数
		原始数据集	本文算法	
1	Iris	95%	96.67%	4
2	Wine	97.75%	98.88%	8
3	Glass	47.62%	52.38%	7
4	Happiness	46.48%	50.70%	3
5	Fire	90.08%	92.56%	4

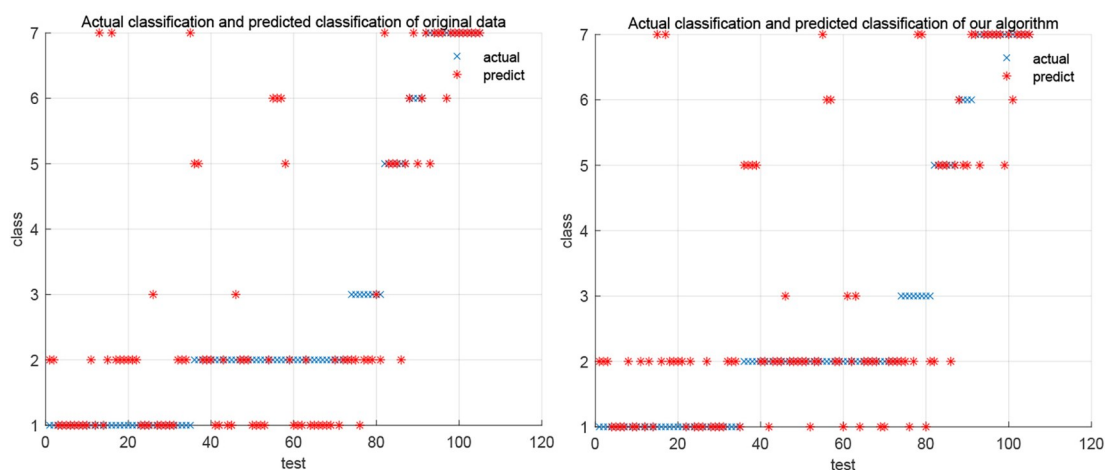


图2 Glass数据集的原始数据集与本文算法的分类精度对比

Fig.2 Classification accuracy of original dataset and our algorithm on Glass dataset

4 结论

本文主要研究多尺度优势单值中智粗糙集的最优尺度选择和约简问题.首先,引入了相对距离有利度作为评判单值中智集优势关系的标准.其次,通过结合多尺度决策系统的概念,构建多尺度优势单值中智粗糙集模型,并给出在该模型下的信任函数和似然函数,讨论得出最优尺度的选择和约简算法.最后,利用Matlab R2020b软件分别对五组UCI数据集在时间效率和分类精度两个方面验证算法的有效性.实验结果表明,本文算法的时间效率和分类精度都有所提高,弥补了传统最优尺度选择算法的不足,能够有效解决多尺度优势单值中智粗糙集模型的最优尺度选择和约简问题,但在模型评估精度方面仍有待提高.考虑到信息系统代价信息的影响,在后续的

工作中将讨论基于代价敏感的多尺度单值中智粗糙集模型及其在审计中的应用,即通过测试代价和延迟代价刻画系统代价并解决在给定代价场景下的最优尺度选择问题.

参考文献

- [1] Pawlak Z. Rough sets. International Journal of Computer & Information Sciences, 1982, 11(5): 341—356.
- [2] Pang B, Mi J S, Xiu Z Y. L -fuzzifying approximation operators in fuzzy rough sets. Information Sciences, 2019(480):14—33.
- [3] Tan A H, Wu W Z, Qian Y H, et al. Intuitionistic fuzzy rough set - based granular structures and attribute subset selection. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2019, 27(3):527—539.

- [4] Chen N, Xu Z S, Xia M M. Interval-valued hesitant preference relations and their applications to group decision making. *Knowledge-Based Systems*, 2013 (37): 528—540.
- [5] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Rough approximation of a preference relation by dominance relations. *European Journal of Operational Research*, 1999, 117(1): 63—83.
- [6] Zhang C, Li D Y, Kang X P, et al. Neutrosophic fusion of rough set theory: An overview. *Computers in Industry*, 2020, 115: 103117.
- [7] 黄兵. 优势区间直觉模糊粗糙模型及应用. *南京大学学报(自然科学)*, 2012, 48(4): 367—375. (Huang B. Dominance interval-valued intuitionistic fuzzy-rough set model and its application. *Nanjing University (Natural Sciences)*, 2012, 48(4): 367—375.)
- [8] 江效尧, 黄兵. 优势模糊区间目标粗糙集模型的群决策规则获取及应用. *南京大学学报(自然科学)*, 2012, 48(4): 429—435. (Jiang X Y, Huang B. Rules acquisition of group decision-making based on dominance and fuzzy interval objective rough set model and its application. *Nanjing University (Natural Sciences)*, 2012, 48(4): 429—435.)
- [9] 李佳, 梁吉业, 庞天杰. 一种基于优势粗糙集的多属性决策排序方法. *南京大学学报(自然科学)*, 2016, 52(5): 844—852. (Li J, Liang J Y, Pang T J. A sorting method of multi-attribute decision making based on dominance rough set theory. *Nanjing University (Natural Sciences)*, 2016, 52(5): 844—852.)
- [10] Smarandache F. A unifying field in logics: Neutrosophic logic. American Research Press, 1999.
- [11] Dai S S, Pei D W, Wang S M. Perturbation of fuzzy sets and fuzzy reasoning based on normalized Minkowski distances. *Fuzzy Sets and Systems*, 2011, 189(1): 63—73.
- [12] Ye J. Improved cosine similarity measures of simplified neutrosophic sets for medical diagnoses. *Artificial Intelligence in Medicine*, 2015, 63(3): 171—179.
- [13] Huang B, Yang X, Feng G F, et al. Relative measure-based approaches for ranking single-valued neutrosophic values and their applications. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2021, DOI: 10.1007/s13042-021-01464-9.
- [14] Wu W Z, Leung Y. Theory and applications of granular labelled partitions in multi-scale decision tables. *Information Sciences*, 2011, 181(18): 3878—3897.
- [15] Li F, Hu B Q. A new approach of optimal scale selection to multi-scale decision tables. *Information Sciences*, 2017(381): 193—208.
- [16] 吴伟志, 杨丽, 谭安辉, 等. 广义不完备多粒度标记决策系统的粒度选择. *计算机研究与发展*, 2018, 55(6): 1263—1272. (Wu W Z, Yang L, Tan A H, et al. Granularity selections in generalized incomplete multi-granular labeled decision systems. *Journal of Computer Research and Development*, 2018, 55(6): 1263—1272.)
- [17] 吴伟志, 庄宇斌, 谭安辉, 等. 不协调广义多尺度决策系统的尺度组合. *模式识别与人工智能*, 2018, 31(6): 485—494. (Wu W Z, Zhuang Y B, Tan A H, et al. Scale combinations in inconsistent generalized multi-scale decision systems. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2018, 31(6): 485—494.)
- [18] 吴伟志, 孙钰, 王霞, 等. 不协调广义多尺度决策系统的局部最优尺度组合选择. *模式识别与人工智能*, 2021, 34(8): 689—700. (Wu W Z, Sun Y, Wang X, et al. Local optimal scale combination selections in inconsistent generalized multi-scale decision systems. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2021, 34(8): 689—700.)
- [19] 陈应生, 李进金, 林荣德, 等. 多尺度集值决策信息系统. *控制与决策*. 2021, DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.0882. (Chen Y S, Li J J, Lin R D, et al. Multi-scale set valued decision information system. *Control and Decision*. 2021, DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.0882.)
- [20] 陈应生, 李进金, 林荣德, 等. 多尺度覆盖决策信息系统的布尔矩阵方法. *模式识别与人工智能*, 2020, 33(9): 776—785. (Chen Y S, Li J J, Lin R D, et al. Boolean matrix approach for multi-scale covering decision information system. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2020, 33(9): 776—785.)
- [21] 郑嘉文, 吴伟志, 包菡, 等. 基于熵的多尺度决策系统的最优尺度选择. *南京大学学报(自然科学)*, 2021, 57(1): 130—140. (Zheng J W, Wu W Z, Bao H, et al. Entropy based optimal scale selection for multi-scale decision systems. *Journal of Nanjing University (Natural Science)*, 2021, 57(1): 130—140.)

- [22] 张清华,张雪秋,庞国弘. 多尺度决策系统中代价敏感的最优尺度组合. 控制与决策, 2021, 36(10): 2369—2378. (Zhang Q H, Zhang X Q, Pang G H. Cost-sensitive optimal scale combination in multi-scale decision systems. Control and Decision, 2021, 36(10):2369—2378.)
- [23] 陈盼盼,林梦雷. 基于包含度的单值中智决策信息系统属性约简. 计算机工程与应用, 2020, 56(12): 175—181. (Chen P P, Lin M L. Attributes reduction of single valued neutrosophic decision information system based on inclusion degree. Computer Engineering and Application, 2020, 56(12):175—181.)
- [24] Huang B, Wu W Z, Yan J J, et al. Inclusion measure-based multi-granulation decision-theoretic rough sets in multi-scale intuitionistic fuzzy information tables. Information Sciences, 2020(507):421—448.
- [25] Huang B, Li H X, Feng G F, et al. Double-quantitative rough sets, optimal scale selection and reduction in multi-scale dominance IF decision tables. International Journal of Approximate Reasoning, 2021(130):170—191.
- [26] 牛东苒,吴伟志,李同军. 广义多尺度决策系统中基于可变精度的最优尺度组合. 模式识别与人工智能, 2019, 32(11): 965—974. (Niu D R, Wu W Z, Li T J. Variable precision based optimal scale combinations in generalized multi-scale decision systems. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2019, 32(11):965—974.)
- [27] Zhang Q H, Cheng Y L, Zhao F, et al. Optimal scale combination selection integrating three-way decision with Hasse diagram. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2021:1—15, DOI: 10.1109/TNNLS.2021.3054063.
- [28] Hao C, Li J H, Fan M, et al. Optimal scale selection in dynamic multi-scale decision tables based on sequential three-way decisions. Information Sciences, 2017, 415—416:213—232.

(责任编辑 杨可盛)