第 56 卷　第 4 期
2020 年 7 月

南京大学学报(自然科学)
JOURNAL OF NANJING UNIVERSITY
(NATURAL SCIENCE)

Vol. 56, No. 4
July, 2020

DOI:10.13232/j.cnki.jnju.2020.04.003

# 有限理性下多粒度q-RO模糊粗糙集的最优粒度选择及其在并购对象选择中的应用

任　睿[1],张　超[2,3*],庞继芳[3]
(1.山西转型综改示范区成果转化有限公司,太原,030032;
2.计算智能与中文信息处理教育部重点实验室(山西大学),太原,030006;
3.山西大学计算机与信息技术学院,太原,030006)

**摘　要:** 有限理性通常指决策者困顿于信息处理能力有限的自然状态,该状态是决策者在实际决策情境中需要面对的常态,因而有必要研究有限理性下的决策问题. 多粒度粗糙集在多属性群决策分析领域的优势在于运算效率高,并能结合决策风险,然而多数基于多粒度粗糙集的多属性群决策方法并未考虑有限理性这一实际情境. 以q-RO(q-Rung Orthopair)模糊集为背景,首先提出乐观与悲观多粒度q-RO模糊粗糙集模型;接着在并购对象选择的背景下,依据交互式多属性决策(Portuguese of Interactive and Multi-criteria Decision Making,TODIM)法来处理有限理性下的决策信息,发展多粒度q-RO模糊粗糙集的最优粒度选择机制并建立相应的多属性群决策方法;最后结合并购对象选择的实际算例验证了所建立模型与方法的有效性.

**关键词:** 有限理性,多粒度粗糙集,多属性群决策,q-RO模糊集,TODIM,并购对象选择

**中图分类号:** TP391　　　　**文献标识码:** A

# Optimal granularity selections of multigranulation q-RO fuzzy rough sets under bounded rationality and their applications in merger and acquisition target selections

Ren Rui[1], Zhang Chao[2,3*], Pang Jifang[3]
(1. Achievement Transformation Co., Ltd., Shanxi Transformation and Comprehensive Reform Demonstration Zone, Taiyuan, 030032, China; 2. Key Laboratory of Computational Intelligence and Chinese Information Processing of Ministry of Education (Shanxi University), Taiyuan, 030006, China; 3. School of Computer and Information Technology, Shanxi University, Taiyuan, 030006, China)

**Abstract:** Bounded rationality usually refers to a natural state that decision makers are limited to finite information processing abilities, and it is normal for them to face bounded rationality in practical decision making scenarios. Thus, studying corresponding decision making problems under bounded rationality is imperative. Multigranulation rough sets (MGRS) own two merits in the field of multi-attribute group decision making (MAGDM), i.e., high computational efficiencies and integrating decision risks. However, most MGRS-based MAGDM methods fail to consider the context of bounded rationality.

基金项目:国家自然科学基金(61806116,61672331,61972238),山西省重点研发计划(国际科技合作)(201903D421041),山西省高等学校青年科研人员培育计划,山西省留学人员科技活动择优资助项目,山西省高等学校优秀成果培育项目(2019SK036),山西省自然科学基金(201801D221175,201901D211176,201901D211414),山西省高等学校科技创新项目(201802014,2019L0066,2019L0500),山西省研究生创新项目(2019SY005)

收稿日期:2020－06－20

* 通讯联系人,E-mail:czhang@sxu.edu.cn

This paper takes q-RO (q-rung orthopair) fuzzy sets as the background and the concept of optimistic and pessimistic multigranulation q-RO fuzzy rough sets is put forward at first. Then, under the context of merger and acquisition target selections, the TODIM(Portuguese of Interactive and Multi-criteria Decision Making) method is utilized to process decision making information under bounded rationality, and optimal granularity selection schemes of multigranulation q-RO fuzzy rough sets along with corresponding MAGDM methods are further developed. At last, a real-life case study for merger and acquisition target selections is investigated to reveal the validity of the constructed models and methods.

**Key words:** bounded rationality, multigranulation rough sets, multi-attribute group decision making, q-RO fuzzy sets, TODIM, merger and acquisition target selections

日常决策过程中决策者往往会受信息处理能力有限性的影响而无法在规定时间内充分处理与决策问题相关的全部信息,他们在这种自然状态下会倾向使自己获利最大、受损最小的问题求解方案,图灵奖与诺贝尔经济学奖得主Simon[1]称上述困顿于信息处理能力有限的自然状态为有限理性.有限理性在智能决策领域有深远的影响,Simon[2]指出有限理性具备两个关键因素:其一为决策者会进行局部搜索而非全局搜索;其二为决策者会采纳最满意解而非最优解.因此,有限理性下的决策问题研究已成为智能决策领域的热点方向并在近年来取得了许多重要进展[3-6].

多粒度粗糙集由Qian et al[7-8]提出,不仅能同时融合多个二元关系来而提升运算效率,而且可以通过融入“求同存异”与“求同排异”这两类信息融合策略来处理风险型决策问题[9-10].学者们已从不同视角系统研究了基于多粒度粗糙集的多属性群决策方法并广泛应用于并购对象选择、人岗匹配、应急决策等诸多领域[11-16].

决策信息的高效表示是基于多粒度粗糙集的多属性群决策问题求解的前提,本文将以q-RO(q-Rung Orthopair)模糊集为背景来研究相应的多粒度粗糙集模型.q-RO模糊集由Yager[17]提出,其中的q-RO模糊数由隶属度$\mu$与非隶属度$\nu$构成,且满足$\mu^q+\nu^q\leqslant 1$, $q\geqslant 1$.不难看出,当$q=1$与$q=2$时,q-RO模糊数分别退化为直觉模糊数[18]与勾股模糊数[19].因此,与直觉模糊集与勾股模糊集相比,q-RO模糊集不仅可以作为它们的推广形式,还能表达更大范围的不确定信息.针对q-RO模糊集在信息表示方面的优势,学者们已从集成算子、近似推理、信息度量、三支决策等多个方面进行了相应背景下的研究[20-23].

由于多粒度粗糙集在求解q-RO模糊多属性群决策问题时会遇到粒度选择的问题,即如何选择多粒度q-RO模糊粗糙集的最优粒度.本文在有限理性下依据交互式多属性决策(Portuguese of Interactive and Multi-criteria Decision Making, TODIM)法[24]来进行粒度选择,进而建立多粒度q-RO模糊粗糙集的最优粒度选择机制.最后,本文以并购对象选择问题为应用背景,进一步提出基于多粒度q-RO模糊粗糙集最优粒度选择的多属性群决策方法并进行算例研究.

本文的主要贡献包括四个方面:

(1)提出一种q-RO模糊数之间的距离度量方法;(2)提出乐观与悲观多粒度q-RO模糊粗糙集模型;(3)发展了基于TODIM法的多粒度q-RO模糊粗糙集最优粒度选择机制;(4)建立了并购对象选择背景下基于TODIM法与多粒度q-RO模糊粗糙集的多属性群决策方法并进行了算例研究.

# 1　基础知识

为方便建立多粒度q-RO模糊粗糙集模型,本节介绍多粒度粗糙集与q-RO模糊集的基本概念.首先,给出如下乐观多粒度粗糙集的定义.

**定义1**[7]　设$U$是一个有限论域,$U$上的二元关系表示为$R_i(i=1,2,\cdots,m)$.对于任意$X\subseteq U$,$X$关于$R_i$的乐观多粒度粗糙下近似与上近似分别为:

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{O}(X)=\left\{\left([x]_{R_1}\subseteq X\right)\vee\left([x]_{R_2}\subseteq X\right)\vee\cdots\vee\left([x]_{R_m}\subseteq X\right)\Big| x\in U\right\}\tag{1}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(X)=\left(\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}\left(X^c\right)\right)^c \tag{2}$$

其中,$[x]_{R_i}$ 为 $x$ 关于 $R_i$ 的等价类,$X^c$ 为 $X$ 的补集,称序对 $\left(\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(X),\overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{O}(X)\right)$ 为 $X$ 关于 $R_i$ 的乐观多粒度粗糙集.

与乐观多粒度粗糙集的定义类似,下面给出悲观多粒度粗糙集的定义.

**定义 2**[8] 设 $U$ 是一个有限论域,$U$ 上的二元关系表示为 $R_i(i=1,2,\cdots,m)$.对于任意 $X\subseteq U$,$X$ 关于 $R_i$ 的悲观多粒度粗糙下近似与上近似分别为:

$$\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}(X)=\left\{\left([x]_{R_1}\subseteq X\right)\wedge\left([x]_{R_2}\subseteq X\right)\wedge \cdots\wedge\left([x]_{R_m}\subseteq X\right)\middle| x\in U\right\} \tag{3}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}(X)=\left(\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}\left(X^c\right)\right)^c \tag{4}$$

称序对 $\left(\underline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}(X),\overline{\sum_{i=1}^{m} R_i}^{P}(X)\right)$ 为 $X$ 关于 $R_i$ 的悲观多粒度粗糙集.

下面给出 q-RO 模糊集的定义与运算规则.

**定义 3**[17] 设 $U$ 是一个有限论域,在 $U$ 上的一个 q-RO 模糊集 $B$ 为:

$$B=\left\{\left\langle x,\left(\mu_b(x),\nu_b(x)\right)\right\rangle \middle| x\in U\right\} \tag{5}$$

其中,$x\in U$ 对于 $B$ 的隶属度与非隶属度分别为 $\mu_b\colon U\to[0,1]$ 与 $\nu_b\colon U\to[0,1]$,且对于任意 $x\in U$,有:

$$\left(\mu_b(x)\right)^q+\left(\nu_b(x)\right)^q\leqslant 1,q\geqslant 1$$

成立.此外,$B$ 的犹豫度为:

$$\pi_b(x)=\sqrt[q]{1-\left(\mu_b(x)\right)^q-\left(\nu_b(x)\right)^q}$$

$U$ 上所有的 q-RO 模糊集记作 $q\text{-}ROF(U)$,$b=(\mu,\nu)$记作一个 q-RO 模糊数.

**定义 4**[17] 设

$$A=\left\{\left\langle x,\left(\mu_a(x),\nu_a(x)\right)\right\rangle \middle| x\in U\right\}$$

与

$$B=\left\{\left\langle x,\left(\mu_b(x),\nu_b(x)\right)\right\rangle \middle| x\in U\right\}$$

是两个 q-RO 模糊集,$b=(\mu,\nu)$与 $b'=(\mu',\nu')$是两个 q-RO 模糊数,那么如下运算规则成立:

(1) $B^c=\left\{\left\langle x,\left(\nu_b(x),\mu_b(x)\right)\right\rangle \middle| x\in U\right\}$;

(2) $A\cap B=\left\{\left\langle X,\mu_a(x)\wedge\mu_b(x),\nu_a(x)\vee\nu_b(x)\right\rangle \middle| x\in U\right\}$;

(3) $A\cup B=\left\{\left\langle X,\mu_a(x)\vee\mu_b(x),\nu_a(x)\wedge\nu_b(x)\right\rangle \middle| x\in U\right\}$;

(4) $b\oplus b'=\left(\sqrt[q]{(\mu)^q+(\mu')^q-(\mu)^q(\mu')^q},\nu\nu'\right)$;

(5) $b\otimes b'=\left(\mu\mu',\sqrt[q]{(\nu)^q+(\nu')^q-(\nu)^q(\nu')^q}\right)$.

Peng and Lin[23]给出了构建 q-RO 模糊距离度量需要满足的要求,接下来本文给出两个 q-RO 模糊数之间的欧几里得距离.

**定义 5** 设 $b=(\mu,\nu)$与 $b'=(\mu',\nu')$是两个 q-RO 模糊数,$\pi$和$\pi'$是这两个 q-RO 模糊数的犹豫度,则 $b$ 与 $b'$之间的欧几里得距离为:

$$d(b,b')=\sqrt[q]{\frac{1}{q}\left[\left((\mu)^q-(\mu')^q\right)^q+\left((\nu)^q-(\nu')^q\right)^q+\left((\pi)^q-(\pi')^q\right)^q\right]} \tag{6}$$

依据两个 q-RO 模糊数 $b$ 与 $b'$之间的欧几里得距离公式,总结该公式满足的如下常见性质:

(1)$0\leqslant d(b,b')\leqslant 1$;

(2)$d(b,b')=d(b',b)$;

(3)若 $b\sim b'$,则 $d(b,b')=0$;

(4)若 $b\prec b'\prec b''$,则 $d(b,b')<d(b,b'')$且 $d(b',b'')<d(b,b'')$.

最后,给出比较不同 q-RO 模糊数的方法来方便进行 q-RO 模糊决策分析.

**定义 6**[21] 设 $b=(\mu,\nu)$是一个 q-RO 模糊数,$b$ 的得分函数 $s(b)$与精确函数 $a(b)$分别为

$$s(b)=\mu_b^q-\nu_b^q \tag{7}$$

$$a(b)=\mu_b^q+\nu_b^q \tag{8}$$

对于两个 q-RO 模糊数 $b$ 和 $b'$,若 $s(b)>s(b')$,则 $b>b'$;若 $s(b)=s(b')$且 $a(b)>a(b')$,则 $b>b'$;若 $s(b)=s(b')$且 $a(b)=a(b')$,则 $b\sim b'$.

## 2　多粒度q-RO模糊粗糙集

本节在q-RO模糊环境下发展相应的乐观与悲观多粒度粗糙集模型.其中,乐观多粒度粗糙集模型是建立在"求同存异"这一信息融合策略之上的,即目标概念下近似仅需要至少一个粒空间来满足包含条件;类似地,悲观多粒度粗糙集模型是建立在"求同排异"这一信息融合策略之上的,即目标概念下近似需要全部粒空间来满足包含条件.下面首先提出如下q-RO模糊关系的概念.

**定义7**　设$U$和$V$是两个有限论域,在$U\times V$上的一个q-RO模糊关系$R$为:

$$R=\left\{\left\langle (x,y),\left(\mu_R(x,y),\nu_R(x,y)\right)\right\rangle \middle| (x,y)\in U\times V\right\} \tag{9}$$

其中,$(x,y)\in U\times V$对于$R$的隶属度与非隶属度分别为$\mu_R$: $U\times V\to[0,1]$与$\nu_R$: $U\times V\to[0,1]$,且对于任意$(x,y)\in U\times V$,有$\left(\mu_R(x,y)\right)^q+\left(\nu_R(x,y)\right)^q\leqslant 1, q\geqslant 1$成立.此外,$U\times V$上所有的q-RO模糊关系记作$q\text{-}ROFR(U\times V)$.

依据上述q-RO模糊关系,给出如下多粒度q-RO模糊粗糙集的定义.

**定义8**　设$U$和$V$是两个有限论域,$U\times V$上的q-RO模糊关系表示为$R_i\in q\text{-}ROFR(U\times V)(i=1,2,\cdots,m)$,称$(U,V,R_i)$为一个多粒度q-RO模糊近似空间.对于任意$B\in q\text{-}ROF(V)$,q-RO模糊集$B$关于$(U,V,R_i)$的乐观多粒度q-RO模糊粗糙下近似与上近似分别为:

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{O}(B)=\left\{\left\langle x,\left(\mu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{O}(B)}(x),\nu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{O}(B)}(x)\right)\right\rangle \middle| x\in U\right\} \tag{10}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{O}(B)=\left\{\left\langle x,\left(\mu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{O}(B)}(x),\nu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{O}(B)}(x)\right)\right\rangle \middle| x\in U\right\} \tag{11}$$

其中,

$$\mu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{O}(B)}(x)=\vee_{i=1}^{m}\wedge_{y\in V}\left[\nu_{R_i}(x,y)\vee\mu_B(y)\right]$$

$$\nu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{O}(B)}(x)=\wedge_{i=1}^{m}\vee_{y\in V}\left[\mu_{R_i}(x,y)\wedge\nu_B(y)\right]$$

$$\mu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{O}(B)}(x)=\wedge_{i=1}^{m}\vee_{y\in V}\left[\mu_{R_i}(x,y)\wedge\mu_B(y)\right]$$

$$\nu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{O}(B)}(x)=\vee_{i=1}^{m}\wedge_{y\in V}\left[\nu_{R_i}(x,y)\vee\nu_B(y)\right]$$

称序对$\left(\underline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{O}(B),\overline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{O}(B)\right)$为q-RO模糊集$B$关于$(U,V,R_i)$的乐观多粒度q-RO模糊粗糙集.

与乐观多粒度q-RO模糊粗糙集的定义类似,下面给出悲观多粒度q-RO模糊粗糙集的定义.

**定义9**　设$U$和$V$是两个有限论域,$U\times V$上的q-RO模糊关系表示为$R_i\in q\text{-}ROFR(U\times V)(i=1,2,\cdots,m)$.对于任意$B\in q\text{-}ROF(V)$,q-RO模糊集$B$关于$(U,V,R_i)$的悲观多粒度q-RO模糊粗糙下近似与上近似分别为:

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{P}(B)=\left\{\left\langle x,\left(\mu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{P}(B)}(x),\nu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{P}(B)}(x)\right)\right\rangle \middle| x\in U\right\} \tag{12}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{P}(B)=\left\{\left\langle x,\left(\mu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{P}(B)}(x),\nu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{P}(B)}(x)\right)\right\rangle \middle| x\in U\right\} \tag{13}$$

其中,

$$\mu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{P}(B)}(x)=\wedge_{i=1}^{m}\wedge_{y\in V}\left[\nu_{R_i}(x,y)\vee\mu_B(y)\right]$$

$$\nu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{P}(B)}(x)=\vee_{i=1}^{m}\vee_{y\in V}\left[\mu_{R_i}(x,y)\wedge\nu_B(y)\right]$$

$$\mu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{P}(B)}(x)=\vee_{i=1}^{m}\vee_{y\in V}\left[\mu_{R_i}(x,y)\wedge\mu_B(y)\right]$$

$$\nu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{P}(B)}(x)=\wedge_{i=1}^{m}\wedge_{y\in V}\left[\nu_{R_i}(x,y)\vee\nu_B(y)\right]$$

称序对$\left(\underline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{P}(B),\overline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{P}(B)\right)$为q-RO模糊集$B$关于$(U,V,R_i)$的悲观多粒度q-RO模糊粗糙集.

## 3 有限理性下多粒度q-RO模糊粗糙集的最优粒度选择

本节以并购对象选择为背景进行有限理性下多粒度q-RO模糊粗糙集的最优粒度选择，进而给出基于TODIM法与多粒度q-RO模糊粗糙集的多属性群决策方法.首先建立如下面向并购对象选择的多粒度q-RO模糊信息系统.

设论域$U=\left\{x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_s\right\}$为目标企业集，论域$V=\left\{y_1,\cdots,y_k,\cdots,y_t\right\}$为评价指标集.依据论域$U$与$V$，在多属性群决策中的每位专家均建立q-RO模糊关系$R_i\in q\text{-}ROFR(U\times V)(i=1,2,\cdots,m)$.接着，拟并购企业依据自身发展的需求在论域$V$上建立由q-RO模糊集表示的并购标准集$B\in q\text{-}ROF(V)$.综上，称序对$(U,V,R_i,B)$为面向并购对象选择的多粒度q-RO模糊信息系统，可用于本节有限理性下多粒度q-RO模糊粗糙集的最优粒度选择并建立相应的多属性群决策方法.

在TODIM法中，首先设$P=\left\{p_1,\cdots,p_h,\cdots,p_l\right\}$与$C=\left\{c_1,\cdots,c_j,\cdots,c_s\right\}$分别代表有限理性下备选方案集与属性集.其中，属性集对应的权重集为$\boldsymbol{w}=\left\{w_1,\cdots,w_j,\cdots,w_s\right\}^T$且满足$w_j\in[0,1]$与$\sum_{j=1}^{s}w_j=1$.此外，决策者需要在权重集中定义参考属性，通常取权重集中的最大权重$w_r$，其对应的属性为$c_r$.由上所述，TODIM法中的决策矩阵可表示为$B=(b_{hj})_{l\times s}$，其中$b_{hj}$是一个q-RO模糊数，表示备选方案$p_h$满足属性$c_j$的程度.下面给出基于TODIM法的具体决策步骤.

首先，计算任意属性$c_j$对于参考属性$c_r$的相对权重$w_{jr}=w_j/w_r$.

其次，计算备选方案$p_h$对于其他备选方案$p_f$的优势度$\delta(p_h,p_f)=\sum_{j=1}^{s}\Phi_j(p_h,p_f)$，当$b_{hj}>b_{fj}$时，

$$\Phi_j(p_h,p_f)=\sqrt{w_{jr}d(b_{hj}-b_{fj})\Big/\left(\sum_{j=1}^{s}w_{jr}\right)}$$

表示备选方案$p_h$对于其他备选方案$p_f$存在收益；当$b_{hj}=b_{fj}$时$\Phi_j(p_h,p_f)=0$，表示备选方案$p_h$对于其他备选方案$p_f$是不输不赢；当$b_{hj}<b_{fj}$时，

$$\Phi_j(p_h,p_f)=-\frac{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{s}w_{jr}\right)d(b_{fj}-b_{hj})/w_{jr}}}{\theta}$$

表示备选方案$p_h$对于其他备选方案$p_f$存在损失.此外，$\theta$通常依据决策者的个人经验来选取，$\theta$的值越大，规避损失的程度越低，且心理学领域中大量实验已证实参数$\theta$通常取1或2.5.

然后，计算备选方案$p_h$的总体优势度：

$$\zeta(p_h)=\frac{\sum_{f=1}^{l}\delta(p_h,p_f)-\min_h\left\{\sum_{f=1}^{l}\delta(p_h,p_f)\right\}}{\max_h\left\{\sum_{f=1}^{l}\delta(p_h,p_f)\right\}-\min_h\left\{\sum_{f=1}^{l}\delta(p_h,p_f)\right\}}\tag{14}$$

最后，依据定义6给出的比较不同q-RO模糊数方法来比较$\zeta(p_h)$，$\zeta(p_h)$越大，则备选方案$p_h$越优.

依据上述基于TODIM法的决策步骤，设$B$关于$(U,V,R_i)$的乐观与悲观多粒度q-RO模糊粗糙近似$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{O}(B)$，$\overline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{O}(B)$，$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{P}(B)$，$\overline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{P}(B)$为TODIM法中的四个备选方案，那么备选方案集为$P=\left\{p_1,p_2,p_3,p_4\right\}$，目标企业集为TODIM法中的属性集，则最优$p_h$为有限理性下多粒度q-RO模糊粗糙集的最优粒度.最后在选择出最优粒度对应的目标企业集中，最优目标企业为$x^*=\max_{j=1}^{s}\left\{s(x_j)\right\}$，若存在$s(x_j)$相等的情况，则计算$a(x_j)$进行区分.

接下来，建立面向并购对象选择的基于TODIM法与多粒度q-RO模糊粗糙集的多属性群决策方法如下所示.

**算法1 基于TODIM法与多粒度q-RO模糊粗糙集的并购对象选择方法**

输入：面向并购对象选择的多粒度q-RO模糊信息系统$(U,V,R_i,B)$；

输出：最优目标企业.

**步骤**1.依据$(U,V,R_i,B)$中的数值确定满足q-RO模糊集与q-RO模糊关系中约束条件的最小$q$值；

**步骤**2.分别计算乐观与悲观多粒度q-RO模糊粗糙

近似$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{O}(B)$，$\overline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{O}(B)$，$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{P}(B)$，$\overline{\sum_{i=1}^{m}R_i}^{P}(B)$；

**步骤**3.确定TODIM法中属性集对应的权重并计算相对权重$w_{jr}$；

**步骤**4.计算备选方案$p_h$对于其他备选方案$p_f$的优势度；

**步骤**5.计算备选方案$p_h$的总体优势度；

**步骤**6.确定有限理性下多粒度q-RO模糊粗糙集的最优粒度；

**步骤**7.在选择出的最优粒度对应的目标企业集中，确定最优目标企业$x^*$.

## 4　算例分析

**4.1　算例描述**　为方便进行对比性分析，以Zhang et al[25]的算例背景为例进行决策分析.设中国某钢铁企业计划从五家目标企业中选择适合企业未来发展的最优目标企业进行并购操作，即论域$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，论域$V=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}$为评价指标集，其中的评价指标分别为矿物产量、开采难度、已探明储量、储采比、科技贡献率.依据论域$U$与$V$，三位专家分别建立如下q-RO模糊关系$R_i\in q\text{-}ROFR(U\times V)(i=1,2,3)$.接着，该钢铁企业建立并购标准集：

$$B=\{\langle y_1,(0.7,0.3)\rangle,\langle y_2,(0.5,0.6)\rangle,\langle y_3,(0.8,0.5)\rangle,\langle y_4,(0.2,0.7)\rangle,\langle y_5,(0.3,0.8)\rangle\}$$

由此，本算例建立了面向并购对象选择的多粒度q-RO模糊信息系统$(U,V,R_i,B)$.

$$R_1=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{array} & \begin{pmatrix} (0.8,0.4) & (0.3,0.8) & (0.6,0.3) & (0.6,0.4) & (0.2,0.9)\\ (0.4,0.7) & (0.3,0.8) & (0.5,0.6) & (0.6,0.5) & (0.7,0.4)\\ (0.6,0.5) & (0.7,0.4) & (0.3,0.8) & (0.3,0.5) & (0.5,0.7)\\ (0.7,0.4) & (0.4,0.7) & (0.5,0.7) & (0.6,0.4) & (0.4,0.7)\\ (0.9,0.2) & (0.4,0.8) & (0.6,0.3) & (0.7,0.2) & (0.7,0.1) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$R_2=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{array} & \begin{pmatrix} (0.8,0.3) & (0.4,0.7) & (0.6,0.3) & (0.7,0.4) & (0.4,0.7)\\ (0.3,0.8) & (0.2,0.9) & (0.3,0.7) & (0.7,0.3) & (0.7,0.4)\\ (0.6,0.4) & (0.8,0.4) & (0.2,0.6) & (0.4,0.7) & (0.4,0.7)\\ (0.7,0.4) & (0.3,0.8) & (0.4,0.7) & (0.8,0.4) & (0.3,0.8)\\ (0.9,0.1) & (0.3,0.8) & (0.6,0.4) & (0.8,0.2) & (0.7,0.3) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$R_3=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{array} & \begin{pmatrix} (0.6,0.5) & (0.2,0.8) & (0.6,0.2) & (0.7,0.3) & (0.3,0.8)\\ (0.5,0.6) & (0.3,0.9) & (0.3,0.8) & (0.7,0.3) & (0.7,0.3)\\ (0.6,0.3) & (0.8,0.2) & (0.3,0.7) & (0.4,0.8) & (0.3,0.7)\\ (0.6,0.2) & (0.2,0.8) & (0.3,0.8) & (0.7,0.2) & (0.3,0.6)\\ (0.8,0.3) & (0.5,0.6) & (0.7,0.4) & (0.6,0.4) & (0.6,0.5) \end{pmatrix} \end{array}$$

**4.2　算例求解**　依据$(U,V,R_i,B)$中的数值，首先确定满足决策数据约束条件的最小$q$值为2.接着，计算如下乐观与悲观多粒度q-RO模糊粗糙近似$\underline{\sum_{i=1}^{3}R_i}^{O}(B)$，$\overline{\sum_{i=1}^{3}R_i}^{O}(B)$，$\underline{\sum_{i=1}^{3}R_i}^{P}(B)$，$\overline{\sum_{i=1}^{3}R_i}^{P}(B)$：

$$\underline{\sum_{i=1}^{3}R_i}^{O}(B)=\{\langle x_1,(0.7,0.3)\rangle,\langle x_2,(0.5,0.6)\rangle,\langle x_3,(0.8,0.5)\rangle,\langle x_4,(0.2,0.7)\rangle,\langle x_5,(0.3,0.7)\rangle\}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{3}R_i}^{O}(B)=\langle x_1,(0.7,0.3)\rangle,\langle x_2,(0.5,0.6)\rangle,\langle x_3,(0.6,0.5)\rangle,\langle x_4,(0.2,0.7)\rangle,\langle x_5,(0.3,0.8)\rangle\}$$

$$\underline{\sum_{i=1}^{3}R_i}^{P}(B)=\{\langle x_1,(0.7,0.3)\rangle,\langle x_2,(0.5,0.6)\rangle,\langle x_3,(0.8,0.5)\rangle,\langle x_4,(0.2,0.7)\rangle,\langle x_5,(0.3,0.7)\rangle\}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{3}R_i}^{P}(B)=\{\langle x_1,(0.7,0.3)\rangle,\langle x_2,(0.5,0.6)\rangle,\langle x_3,(0.7,0.5)\rangle,\langle x_4,(0.2,0.7)\rangle,\langle x_5,(0.3,0.8)\rangle\}$$

为公平起见，设该并购事件中并购对象之间没有明显差异，即在此背景下属性集对应的权重相等，则$w_{jr}=1$.令$P=\{p_1,p_2,p_3,p_4\}$为有限理性下备选方案集，其中的元素分别为$\underline{\sum_{i=1}^{3}R_i}^{O}(B)$，$\overline{\sum_{i=1}^{3}R_i}^{O}(B)$，$\underline{\sum_{i=1}^{3}R_i}^{P}(B)$，$\overline{\sum_{i=1}^{3}R_i}^{P}(B)$.取参数$\theta=1$，构建有限理性下备选方案的收益-损失矩阵如下：

$$\boldsymbol{\Phi}_1=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} p_1\\ p_2\\ p_3\\ p_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_2=\begin{array}{c|cccc} & p_1 & p_2 & p_3 & p_4\\ p_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ p_2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ p_3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ p_4 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_3=\begin{array}{c|cccc} & p_1 & p_2 & p_3 & p_4\\ p_1 & 0 & 0.2357 & 0 & 0.1736\\ p_2 & -1.1786 & 0 & -1.1786 & -0.7975\\ p_3 & 0 & 0.2357 & 0 & 0.1736\\ p_4 & -0.8678 & 0.1595 & -0.8678 & 0\end{array}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_4=\begin{array}{c|cccc} & p_1 & p_2 & p_3 & p_4\\ p_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ p_2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ p_3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ p_4 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_5=\begin{array}{c|cccc} & p_1 & p_2 & p_3 & p_4\\ p_1 & 0 & 0.1738 & 0 & 0.1738\\ p_2 & -0.8692 & 0 & -0.8692 & 0\\ p_3 & 0 & 0.1738 & 0 & 0.1738\\ p_4 & -0.8678 & 0 & -0.8692 & 0\end{array}$$

依据上述收益-损失矩阵,进一步得到备选方案 $p_h$ 对于其他备选方案 $p_f$ 的优势度矩阵如下:

$$\boldsymbol{\delta}=\begin{array}{c|cccc} & p_1 & p_2 & p_3 & p_4\\ p_1 & 0 & 0.4095 & 0 & 0.3474\\ p_2 & -2.0478 & 0 & -2.0478 & -0.7975\\ p_3 & 0 & 0.4095 & 0 & 0.3474\\ p_4 & -1.737 & 0.1595 & -1.737 & 0\end{array}$$

最后,分别计算四个不同粒度层次下备选方案 $p_h$ 的总体优势度:$\zeta(p_1)=1$, $\zeta(p_2)=0$, $\zeta(p_3)=1$, $\zeta(p_4)=0.2794$. 上述结果揭示了有限理性下多粒度 q-RO 模糊粗糙集的最优粒度为 $p_1$ 或 $p_3$,即最优粒度对应的目标企业集为 $\underline{\sum_{i=1}^{3}R_i}^{O}(B)$ 或 $\underline{\sum_{i=1}^{3}R_i}^{P}(B)$. 依据 $\underline{\sum_{i=1}^{3}R_i}^{O}(B)$ 或 $\underline{\sum_{i=1}^{3}R_i}^{P}(B)$ 的结果,通过 $\max_{j=1}^{s}\{s(x_j)\}$ 确定最优目标企业,结果表明 $x^*=x_1$,即企业 $x_1$ 为最优目标企业.

**4.3 对比性分析与讨论** 在 Zhang et al[25]的方法中,依据 $\underline{\sum_{i=1}^{3}R_i}^{O}(B)$, $\overline{\sum_{i=1}^{3}R_i}^{O}(B)$, $\underline{\sum_{i=1}^{3}R_i}^{P}(B)$, $\overline{\sum_{i=1}^{3}R_i}^{P}(B)$ 进一步计算合成乐观多粒度 q-RO 模糊粗糙近似与合成悲观多粒度 q-RO 模糊粗糙近似如下:

$$\underline{\sum_{i=1}^{3}R_i}^{O}(B)\oplus\overline{\sum_{i=1}^{3}R_i}^{O}(B)=\Big\{\big\langle x_1,(0.86,0.09)\big\rangle,\big\langle x_2,(0.66,0.36)\big\rangle,\big\langle x_3,(0.88,0.25)\big\rangle,\big\langle x_4,(0.28,0.49)\big\rangle,\big\langle x_5,(0.41,0.56)\big\rangle\Big\}$$

$$\underline{\sum_{i=1}^{3}R_i}^{P}(B)\oplus\overline{\sum_{i=1}^{3}R_i}^{P}(B)=\Big\{\big\langle x_1,(0.86,0.09)\big\rangle,\big\langle x_2,(0.66,0.36)\big\rangle,\big\langle x_3,(0.90,0.25)\big\rangle,\big\langle x_4,(0.28,0.49)\big\rangle\big\langle x_5,(0.41,0.56)\big\rangle\Big\}$$

企业决策者依据合成乐观多粒度 q-RO 模糊粗糙近似得到的最优目标企业为 $x_1$,依据合成悲观多粒度 q-RO 模糊粗糙近似得到的最优目标企业为 $x_3$,可见上述结果依赖于企业决策者的主观风险选择.而本文建立的基于 TODIM 法与多粒度 q-RO 模糊粗糙集的的并购对象选择方法融入了有限理性下多粒度 q-RO 模糊粗糙集的最优粒度选择机制,即从追求局部搜索与最满意解的角度给出了如何选取不同多粒度 q-RO 模糊粗糙近似的一种语义解释,克服了主观选取不同粒度层次的局限,可视为一种符合实际决策情境的 q-RO 模糊多属性群决策方法.

综上所述,和其他粒计算驱动的多属性群决策方法[26-28]相比,本文的主要贡献是在有限理性下给出了多粒度 q-RO 模糊粗糙集模型,并赋予了广义多粒度粗糙集的最优粒度选择机制一种合理的语义解释.

## 5 结 论

本文研究了有限理性下基于多粒度粗糙集的复杂多属性群决策方法.首先在 q-RO 模糊背景下,发展了乐观与悲观多粒度 q-RO 模糊粗糙集模型;接着,结合 TODIM 法研究了一种有限理性下多粒度 q-RO 模糊粗糙集的最优粒度选择,并给出了并购对象选择背景下的多属性群决策方法;最后,算例分析与对比性分析验证了所提出模型与方法的有效性.未来研究工作一方面将关注多粒度 q-RO 模糊粗糙集的理论性质与不确定性

度量,另一方面将研究如何融入其他有限理性分析工具来求解更广泛的商务智能问题.

## 参考文献


[1] Simon H A. Administrative behavior. New York: Free Press, 1957: 72－87.

[2] Simon H A. Bounded rationality and organizational learning. Organization Science, 1991, 2(1): 125－134.

[3] Peng Y, Lu Q. Complex dynamics analysis for a duopoly Stackelberg game model with bounded rationality. Applied Mathematics and Computation, 2015, 271: 259－268.

[4] Liu D H, Lv W, Li H Y, et al. Bargaining model of labor disputes considering social mediation and bounded rationality. European Journal of Operational Research, 2017, 262(3): 1064－1071.

[5] Liang D C, Zhang Y R J, Xu Z S, et al. Pythagorean fuzzy vikor approaches based on todim for evaluating internet banking website quality of Ghanaian banking industry. Applied Soft Computing, 2019, 78: 583－594.

[6] Liang D C, Wang M W, Xu Z S, et al. Risk appetite dual hesitant fuzzy three-way decisions with todim. Information Sciences, 2020, 507: 585－605.

[7] Qian Y H, Liang J Y, Yao Y Y, et al. MGRS: a multi-granulation rough set. Information Sciences, 2010, 180(6): 949－970.

[8] Qian Y H, Li S Y, Liang J Y, et al. Pessimistic rough set based decisions: a multigranulation fusion strategy. Information Sciences, 2014, 264: 196－210.

[9] Qian Y H, Zhang H, Sang Y L, et al. Multigranulation decision: theoretic rough sets. International Journal of Approximate Reasoning, 2014, 55(1): 225－237.

[10] Qian Y H, Liang X Y, Lin G P, et al. Local multigranulation decision-theoretic rough sets. International Journal of Approximate Reasoning, 2017, 82: 119－137.

[11] Zhang C, Li D Y, Liang J Y. Hesitant fuzzy linguistic rough set over two universes model and its applications. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2018, 9(4): 577－588.

[12] Zhan J M, Sun B Z, Alcantud J C R. Covering based multigranulation $(\mathscr{I}, \mathscr{T})$-fuzzy rough set models and applications in multi-attribute group decision-making. Information Sciences, 2019, 476: 290－318.

[13] Zhang C, Li D Y, Liang J Y. Interval-valued hesitant fuzzy multi-granularity three-way decisions in consensus processes with applications to multi-attribute group decision making. Information Sciences, 2020, 511: 192－211.

[14] Zhang C, Li D Y, Liang J Y. Multi-granularity three-way decisions with adjustable hesitant fuzzy linguistic multigranulation decision-theoretic rough sets over two universes. Information Sciences, 2020, 507: 665－683.

[15] Sun B Z, Ma W M, Li B J, et al. Three-way decisions approach to multiple attribute group decision making with linguistic information-based decision-theoretic rough fuzzy set. International Journal of Approximate Reasoning, 2018, 93: 424－442.

[16] Sun B Z, Zhou X M, Lin N N. Diversified binary relation-based fuzzy multigranulation rough set over two universes and application to multiple attribute group decision making. Information Fusion, 2020, 55: 91－104.

[17] Yager R R. Generalized orthopair fuzzy sets. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2017, 25(5): 1222－1230.

[18] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87－96.

[19] Yager R R, Abbasov A M. Pythagorean membership grades, complex numbers, and decision making. International Journal of Intelligent Systems, 2013, 28(5): 436－452.

[20] Yager R R, Alajlan N. Approximate reasoning with generalized orthopair fuzzy sets. Information Fusion, 2017, 38: 65－73.

[21] Liu P D, Chen S M, Wang P. Multiple-attribute group decision-making based on q-rung orthopair fuzzy power maclaurin symmetric mean operators. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2018: 1－16, doi: 10.1109/TSMC.2018.2852948.

[22] Darko A P, Liang D C. Some q-rung orthopair fuzzy Hamacher aggregation operators and their application to multiple attribute group decision making with

modified EDAS method. Engineering Applications of Artificial Intelligence,2020,87:103259.

[23] Peng X D,Liu L. Information measures for q-rung orthopair fuzzy sets. International Journal of Intelligent Systems,2019,34(8):1795-1834.

[24] Gomes L F A M,Lima M M P P. Todim:basic and application to multicriteria ranking of projects with environmental impacts. Foundations of Computing and Decision Sciences,1992,16(3):113-127.

[25] Zhang C, Li D Y, Ren R. Pythagorean fuzzy multigranulation rough set over two universes and its applications in merger and acquisition. International Journal of Intelligent Systems, 2016, 31(9): 921-943.

[26] 宋鹏,梁吉业,曹付元.基于邻域粗糙集的企业财务危机预警指标选择.经济管理,2009,31(8):130-135.(Song P,Liang J Y,Cao F Y. Index selection of enterprise's financial crisis early warning based on neighborhood rough set. Economic Management Journal,2009,31(8):130-135.)

[27] 张超,李德玉.考虑关联性与优先关系的区间犹豫模糊图决策.计算机研究与发展,2019,54(11):2438-2447.(Zhang C,Li D Y. Interval-valued hesitant fuzzy graphs decision making with correlations and prioritization relationships. Journal of Computer Research and Development, 2019, 54(11): 2438-2447.)

[28] Zhang C, Li D Y, Kang X P, et al. Neutrosophic fusion of rough set theory:An overview. Computers in Industry,2020,115:103117.

(责任编辑　杨可盛)