

DOI:10.13232/j.cnki.jnju.2020.01.010

带权图的多重分形研究

刘胜久^{1,2}, 李天瑞^{1,2*}, 珠杰³, 刘佳^{1,2}

(1. 西南交通大学信息科学与技术学院, 成都, 611756; 2. 四川省云计算与智能技术高校重点实验室, 成都, 611756;
3. 西藏大学信息科学技术学院, 拉萨, 850000)

摘要: 自相似特性是复杂网络研究的重点, 分形维数是度量其自相似特性的重要工具. 针对带权图中节点权重与边权重可以为正实数、负实数、纯虚数及复数等多种不同数值的情形, 给出各种不同带权图的多重分形维数, 讨论了带权图的多重分形特性. 研究表明, 在不同类型的带权图中, 除节点权重及边权重均为正实数的情形之外, 其他类型的带权图均具有多重分形特性. 最后分析了这些带权图多重分形维数的性质.

关键词: 复杂网络, 带权图, 自相似, 分形理论, 多重分形

中图分类号: TP391

文献标识码: A

Research on multi-fractals of weighted graphs

Liu Shengjiu^{1,2}, Li Tianrui^{1,2*}, Zhu Jie³, Liu Jia^{1,2}

(1. School of Information Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu, 611756, China;
2. Sichuan Key Lab of Cloud Computing and Intelligent Technique, Chengdu, 611756, China;
3. School of Information Science and Technology, Tibetan University, Lhasa, 850000, China)

Abstract: Self-similarity is one focus of research on complex network, while fractal dimension is an important tool for measuring its self-similarity. For the case that both node weight and edge weight in weighted graphs can value among positive real number, negative real number, pure imaginary number and complex number, and so on, this paper purposes fractal dimensions for various weighted graphs and discusses their multi-fractals. It is shown that among all types of weighted graphs, except the weighted graphs with both node weight and edge weight being positive real numbers, other types of weighted graphs share multi-fractals. Finally, the properties of the multi-fractal dimensions of these weighted graphs are analyzed.

Key words: complex network, weighted graph, self-similarity, fractal theory, multi-fractals

复杂网络是复杂系统的高度抽象, 图论是复杂网络研究的基础, 对复杂网络的研究大多是从图论开始的. 自 20 世纪 60 年代两位匈牙利科学家 Erdős and Rényi^[1] 提出 ER 随机图理论以来, 复杂网络的研究重新引起人们的关注, 掀起了对复杂网络研究的新浪潮.

对真实世界中的复杂系统进行研究时, 人们发现, 真实系统中的种种现象不能完全用 ER 随机图理论解释, 对 ER 随机图理论的改进成为复杂网络新的研究重点. WS (Watts-Strogatz)^[2], NW (Newman-Watts)^[3], BA (Barabasi-Albert)^[4] 等其他类型的网络模型被相继提出, 这些网络模

基金项目: 国家自然科学基金(61573292, 61262058, 61751216)

收稿日期: 2019-06-28

* 通讯联系人, E-mail: trli@swjtu.edu.cn

型均是通过对 ER 随机图理论中的连接机理进行改进而得到的. 通过图的邻接矩阵对复杂网络进行研究也是复杂网络研究的重要途径^[5].

WS 与 NW 网络模型揭示了复杂网络的小世界特性, 与之相对, BA 网络模型揭示了复杂网络的无标度特性, 二者分别称为复杂网络的第一大特性和第二大特性. 在复杂网络的深入研究中人们发现, 复杂网络中同样存在自相似特性——被称为复杂网络的第三大特性^[6]. 对自相似复杂网络模型的研究是复杂网络自相似特性研究的重点. 由于图与其邻接矩阵是一一对应的, 先构建自相似矩阵形式的邻接矩阵, 进而间接得到自相似形式的复杂网络是构建自相似复杂网络的一种可行的方法^[7]. 刘胜久等^[8]通过矩阵运算生成了自相似形式的复杂网络并给出其分形维数, 进一步将复杂网络由无权图推广到带权图^[9], 而且将带权图中节点与边的权重由正实数域推广到包含正实数、负实数、纯虚数及复数等数值的复数域, 并给出每种类别带权图的网络维数. 网络维数其实就是拓展的分形维数.

目前对复杂网络自相似特性的研究主要是在无权图上进行的, 对带权图形式复杂网络自相似特性的研究已成为复杂网络研究的热点. 对复杂网络而言, 采用一个单一的分形维数并不能全面地描述复杂网络的各项特性, 而多重分形采用多个不同的分形维数进行描述, 为更全面地描述复杂网络的各项特性提供了可行的方案. 本文对不同形式带权图的分形维数进行研究, 探讨多重分形理论在带权图中的研究与应用.

1 预备知识

1.1 图论与复杂网络 图可以表述为 $G=(V, E)$, 其中 V 为节点集且 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_i, \dots\} (1 \leq i \leq |V|)$ 是图中所有节点的集合; E 为边集且 $E=\{e_1, e_2, \dots, e_j, \dots\} (1 \leq j \leq |E|)$ 是图中所有边的集合. $|V|$ 表示图 G 中所有节点的数目, $|E|$ 表示图 G 中所有边的数目.

定义 1^[10] 简单图是指图中既不含有平行边又不含有自环的图.

以下若无特殊说明, 研究的图均是简单图.

定义 2^[10] 无权图是指图中的节点与边均不带有权重的图, 即图中的任一节点 v_i 的权重 $f(v_i)$ 均为 1, 且图中任一边 e_j 的权重 $f(e_j)$ 也为 1, 可以认为 $f(v_i) \in \{0, 1\}, f(e_j) \in \{0, 1\}$.

显然, 对无权图有 $|V| = \sum f(v_i), |E| = \sum f(e_j)$.

定义 3^[10] 带权图是指图中的节点或边带有权重的图. 带权图突破了无权图中图的节点与边均不带有权重的局限, 将节点与边的权重从 0~1 推广到整个数域. 可以发现, 带权图是无权图的拓展, 无权图是带权图的特例.

在带权图中, 节点与边的权重可以为正实数、负实数、纯虚数, 乃至复数. 由于在现实生活中, 从复杂系统抽象而出的复杂网络中节点与边的权重一般为正实数, 对带权图的研究主要是以节点与边的权重均为正实数的带权图为主. 对权重为负实数、纯虚数及复数等其他类型带权图的研究并不多见.

1.2 分形与多重分形 分形理论是一种分析研究物体的新视角. 相较于传统欧氏几何中一维的线、二维的面、三维的体, 分形理论能更好地刻画不光滑、不规则、不一致的物体. 分形理论是描述自相似现象的重要工具. 对自相似形式的物体而言, 主要是对其分形维数的研究. 人们相继提出了一系列度量物体分形维数的方法, 如计盒维数、Hausdorff 维数、信息维数等. Hausdorff 维数是计算分形维数较为通行的方法, Hausdorff 维数的计算公式如式(1)所示:

$$d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\lg N(\epsilon)}{\lg \epsilon^{-1}} \quad (1)$$

其中, ϵ 是小立方体的棱长或小球体的半径, $N(\epsilon)$ 是用此小立方体或小球体覆盖被测形体所得的数目. 式(1)意味着通过用边长为 ϵ 的小立方体或半径为 ϵ 的小球体覆盖被测形体来确定形体的维数. 通常情况下, 对任一物体 X , 其 Hausdorff 维数 $\dim_H X$ 与拓扑维数 $\dim_t X$ 二者之间存在以下关系^[11], 如式(2)所示:

$$\dim_t X \leq \dim_H X \quad (2)$$

对于三维的欧氏空间而言, 应用式(1)可以得到形体的分形维数, 根据式(2), 其分形维数不超过 3. 而现实空间中的一些真实物体往往不便或

难以用式(1)直接计算,如天空中的云朵、液体中的湍流等.对于这些物体,可以先将其投射到低维空间,再计算投射物的分形维数,最后根据余维相加定律得到初始状态物体的分形维数^[12].如对天空中的云朵分形维数 FD_3 的计算,可以先计算卫星图像中云图的分形维数 FD_2 ,再根据余维相加定律,通过式(3),间接得到云朵的分形维数:

$$FD_3 = FD_2 + 1 \quad (3)$$

在对自相似物体分形维数的分析研究中,人们发现,通过一个单一的分形维数不能全面刻画物体的各项特性,于是提出通过多个不同的分形维数对物体进行分析描述,这就是多重分形^[13].最简单的多重分形是双分形^[14].多重分形突破了传统的分形研究中将物体的分形维数表述为数轴上的一个点的局限,使物体的分形维数可以表述为平面坐标系中的多个点,乃至直线或者曲线等,这样可以更全面地描述物体的各项特性.多重分形目前没有公认的严格定义,但对多重分形的研究是分形理论研究的重要内容.

1.3 自相似复杂网络 对自相似复杂网络而言,通过自相似形式的邻接矩阵得到的网络也是自相似的.由于图与其邻接矩阵是一一对应的,邻接矩阵的分形维数也就是其对应的复杂网络的分形维数.于是,复杂网络的分形维数可以通过其对应的邻接矩阵间接得到.

定义4^[9] 网络维数指任一网络的边权重和的对数值与节点权重和的对数值的比值,其定义如式(4)所示:

$$FD(G) = \frac{1}{\lg \sum_{v \in V} f(v)} \lg \sum_{e \in E} f(e) \quad (4)$$

其中, E, V 分别表示网络 G 的边集与节点集, $f(e)$ 和 $f(v)$ 分别表示网络 G 的边权重与节点权重.

网络维数其实就是网络的分形维数.对正实数形式的节点权重及边权重,应用式(4)可以直接得到复杂网络的网络维数,而对于负实数、纯虚数及复数等其他形式的节点权重及边权重,则可以借助欧拉公式进行计算,以间接得到复杂网络的网络维数.欧拉公式如式(5)所示:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (5)$$

由于正弦函数与余弦函数均是周期函数,所

以式(5)其实是一个周期多值函数,一般情况下只在一个周期内对其进行分析研究即可.

现有的研究表明,多重分形在复杂网络中广泛存在^[15],并已有多种不同的分析研究方法^[16].由于对节点权重与边权重为负实数、纯虚数及复数等其他类型带权图的分形维数需要借助周期多值函数形式的欧拉公式进行计算,这将导致这些类型的带权图分形维数不唯一,也即需要用多个不同的分形维数进行描述,这其实就是带权图多重分形特性的根源.

2 带权图的多重分形研究

对于复杂网络,通过一个单一的分形维数对其自相似特性进行描述并不能全面地反映复杂网络的各项特性,实际上,多重分形在复杂网络中是广泛存在的.本节探讨了各种不同类型权重带权图的多重分形特性,主要是通过带权图的分形维数对其多重分形特性进行研究.

在带权图中,由于其分形维数表述为边权重和的对数值与节点权重和的对数值的比值,对节点及边的权重分别为正实数、负实数、纯虚数、复数等多种不同形式的带权图而言,共有16种不同的权重组合.分别对节点权重为正实数、负实数、纯虚数、复数等四种不同类型权重对应的带权图分形维数进行研究,以下先对节点权重为正实数的带权图分形维数进行分析.

2.1 节点权重为正实数的带权图分形维数研究

在节点权重为正实数的情形下,分别对边权重为正实数、负实数、纯虚数及复数的带权图的分形维数进行分析.在涉及欧拉公式时,只在 $[-\pi, \pi]$ 的区间内对其进行分析.节点权重为正实数的四种不同类型带权图的分形维数统计如表1所示.

进一步在复平面中对表1列举的四种(式(6)至式(9))不同的带权图进行分析.

显然,式(6)在复平面中为一个点.由于式(5)的欧拉公式实际上是一个周期多值函数,对表1中的另外三种不同类型带权图进行分析研究时,需要考虑多值函数的实际情况.

对式(7)的节点权重为正实数、边权重为负实数的带权图的多重分形维数而言,可以将其进行拓展,并取自然对数,于是可以得到式(10):

表 1 节点权重为正实数的四种不同类型带权图分形维数统计表

Table 1 Statistics of fractal dimensions of four weighted graphs with node weight being positive real numbers

编号	节点权重	边权重	分形维数
1		正实数 $f(e)$	$\frac{1}{\lg \sum_{v \in V} f(v)} \lg \sum_{e \in E} f(e) \quad (6)$
2	正实数 $f(v)$	负实数 $-f(e)$	$\frac{1}{\lg \sum_{v \in V} f(v)} \lg e^{i\pi} \sum_{e \in E} f(e) \quad (7)$
3		纯虚数 $if(e)$	$\frac{1}{\lg \sum_{v \in V} f(v)} \lg e^{\frac{i\pi}{2}} \sum_{e \in E} f(e) \quad (8)$
4		复数 $(a+bi)f(e)$	$\frac{1}{\lg \sum_{v \in V} f(v)} \lg \sqrt{a^2+b^2} e^{i \tan^{-1} \frac{b}{a}} \sum_{e \in E} f(e) \quad (9)$

$$FD_{PN} = \frac{1}{\ln \sum_{v \in V} f(v)} \left[\ln \sum_{e \in E} f(e) + i\pi(2m+1) \right], \quad (m \in Z) \quad (10)$$

显然,式(10)也是一个多值函数.在复平面中,其均匀分布在一条平行于虚轴的直线上,该直线如式(11)所示:

$$z \ln \sum_{v \in V} f(v) = \ln \sum_{e \in E} f(e) \quad (11)$$

同理对表1中的另外两种带权图进行分析.

对于式(8)的节点权重为正实数、边权重为纯虚数的带权图,其多重分形维数如式(12)所示:

$$FD_{PI} = \frac{1}{\ln \sum_{v \in V} f(v)} \left[\ln \sum_{e \in E} f(e) + i\pi \left(2m + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (m \in Z) \quad (12)$$

显然式(12)也是一个多值函数,在复平面中均匀分布在一条平行于虚轴的直线上,如式(11)所示.

对式(9)的节点权重为正实数、边权重为复数的带权图而言,其多重分形维数如式(13)所示:

$$FD_{PC} = \frac{1}{\ln \sum_{v \in V} f(v)} \left[\ln \sqrt{a^2+b^2} \sum_{e \in E} f(e) + i \left(2m\pi + \tan^{-1} \frac{b}{a} \right) \right], \quad (m \in Z) \quad (13)$$

$$FD_{NP} = \frac{1}{(2m+1)^2 \pi^2 + \ln^2 \sum_{v \in V} f(v)} \ln \sum_{e \in E} f(e) \left[\ln \sum_{v \in V} f(v) - i\pi(2m+1) \right], \quad (m \in Z) \quad (19)$$

显然,式(19)是一个多值函数,在复平面中,其分布在一条曲线上,该曲线方程如式(20)所示:

$$|2z \ln f(v) \ln f(e)| = \left| \ln \sum_{e \in E} f(e) \right| \quad (20)$$

显然,式(13)也是一个多值函数.在复平面中,其均匀分布在一条平行于虚轴的直线上,该直线如式(14)所示:

$$z \ln \sum_{v \in V} f(v) = \ln \sqrt{a^2+b^2} \sum_{e \in E} f(e) \quad (14)$$

以上对节点权重为正实数的四种不同类型带权图的分形维数进行分析研究,可以发现,对边权重为负实数、纯虚数、复数的三种不同类型的带权图而言,其分形维数(式(10)、式(12)、式(13))在复平面中都均匀分布在一条直线上,分别为式(11)、式(11)、式(14)所示,也即可以用多个不同的分形维数来对其进行表述,这其实就是这些带权图的多重分形.

2.2 节点权重为负实数的带权图分形维数研究

类似2.1对节点权重为正实数的带权图分形维数的研究方法,对节点权重为负实数的四种不同类型带权图(式(15)至式(18))的分形维数进行研究,同样,在 $[-\pi, \pi]$ 的对称区间内,其分形维数计算结果如表2所示.

同理,对表2中的分形维数需要给出多值函数情形下的分形维数表述方法.

对式(15)的节点权重为负实数、边权重为正实数的带权图而言,其多重分形维数如式(19)所示:

表2 节点权重为负实数的四种不同类型带权图分形维数统计表

Table 2 Statistics of fractal dimensions of four weighted graphs with node weight being negative real numbers

编号	节点权重	边权重	分形维数
1		正实数 $f(e)$	$\frac{1}{\lg e^{i\pi} \sum_{v \in V} f(v)} \lg \sum_{e \in E} f(e)$ (15)
2		负实数 $-f(e)$	$\frac{1}{\lg e^{i\pi} \sum_{v \in V} f(v)} \lg e^{i\pi} \sum_{e \in E} f(e)$ (16)
3	负实数 $-f(v)$	纯虚数 $if(e)$	$\frac{1}{\lg e^{i\pi} \sum_{v \in V} f(v)} \lg e^{\frac{i\pi}{2}} \sum_{e \in E} f(e)$ (17)
4		复数 $(a+bi)f(e)$	$\frac{1}{\lg e^{i\pi} \sum_{v \in V} f(v)} \lg \sqrt{a^2+b^2} e^{i \tan^{-1} \frac{b}{a}} \sum_{e \in E} f(e)$ (18)

该曲线是一个以点 $\left(\frac{\ln \sum_{e \in E} f(e)}{2 \ln \sum_{v \in V} f(v)}, 0\right)$ 为圆心,以 $\left|\frac{\ln \sum_{e \in E} f(e)}{2 \ln \sum_{v \in V} f(v)}\right|$ 为半径且经过原点的圆.

对式(16)的节点权重为负实数、边权重为负实数的带权图而言,其多重分形维数如式(21)所示:

$$FD_{NN} = \frac{\ln \sum_{v \in V} f(v) \ln \sum_{e \in E} f(e) + (2m+1)(2n+1)\pi^2}{(2m+1)^2\pi^2 + \ln^2 \sum_{v \in V} f(v)} + i\pi \frac{(2n+1) \ln \sum_{v \in V} f(v) - (2m+1) \ln \sum_{e \in E} f(e)}{(2m+1)^2\pi^2 + \ln^2 \sum_{v \in V} f(v)},$$

(21)

显然,式(21)是一个多值函数,在复平面中,其分布在经过同一点的一簇直线的直线系上,该直线系的方程如式(22)所示:

$$z = \frac{1}{\ln \sum_{v \in V} f(v)} \sum_{e \in E} f(e) + t \left[i \frac{1}{(2m+1)\pi} \sum_{e \in E} f(e) - \frac{1}{\ln \sum_{v \in V} f(v)} \sum_{e \in E} f(e) \right], (m \in Z, t \in R)$$

(22)

则该直线系是一簇经过点 $\left(\frac{1}{\ln \sum_{v \in V} f(v)} \ln \sum_{e \in E} f(e), 0\right)$ 的直线.

式(21)中的多值函数也可视为分布在多个圆的圆系上,该圆系的方程如式(23)所示:

$$\left| 2z \ln \sum_{v \in V} f(v) - \ln \sum_{e \in E} f(e) - i\pi(2n+1) \right| = \sqrt{\ln^2 \sum_{e \in E} f(e) + (2n+1)^2\pi^2}, (n \in Z)$$

(23)

其圆心为 $\left(\frac{\ln \sum_{e \in E} f(e)}{2 \ln \sum_{v \in V} f(v)}, i\pi \frac{2n+1}{2 \ln \sum_{v \in V} f(v)}\right)$,半径为 $\left|\frac{\sqrt{\ln^2 \sum_{e \in E} f(e) + (2n+1)^2\pi^2}}{2 \ln \sum_{v \in V} f(v)}\right|$.

使用等价的参数方程表述,则式(21)中的多值函数如式(24)所示:

$$2z \ln f(v) = \ln f(e) + i\pi(2n+1) + \sqrt{\ln^2 \sum_{e \in E} f(e) + (2n+1)^2\pi^2} (\cos\theta + i\sin\theta),$$

$$\left(\theta = \tan^{-1} \frac{1}{(2m+1)\pi} \ln \sum_{v \in V} f(v), m, n \in Z \right)$$

(24)

式(24)实际上是式(22)所示的直线系与式(23)所示的圆系的交点.

对式(17)的节点权重为负实数、边权重为纯虚数的带权图而言,其多重分形维数如式(25)所示:

$$FD_{NI} = \frac{2 \ln \sum_{v \in V} f(v) \ln \sum_{e \in E} f(e) + (2m+1)(4n+1)\pi^2}{2(2m+1)^2\pi^2 + 2 \ln^2 \sum_{v \in V} f(v)} + i\pi \frac{(4n+1) \ln \sum_{v \in V} f(v) - (4m+2) \ln \sum_{e \in E} f(e)}{2(2m+1)^2\pi^2 + 2 \ln^2 \sum_{v \in V} f(v)}, (m, n \in Z) \quad (25)$$

显然, 式(25)是一个多值函数, 在复平面中, 其分布在经过同一点的一簇直线的直线系上, 如式(22)所示.

式(25)中的多值函数也可视为分布在多个圆的圆系上, 该圆系的方程如式(26)所示:

$$\left| 4z \ln \sum_{v \in V} f(v) - 2 \ln \sum_{e \in E} f(e) - i\pi(4n+1) \right| = \sqrt{4 \ln^2 \sum_{e \in E} f(e) + (4n+1)^2 \pi^2}, (n \in Z) \quad (26)$$

其圆心为 $\left(\frac{\ln \sum_{e \in E} f(e)}{2 \ln \sum_{v \in V} f(v)}, i\pi \frac{4n+1}{4 \ln \sum_{v \in V} f(v)} \right)$, 半径为 $\left| \frac{\sqrt{4 \ln^2 \sum_{e \in E} f(e) + (4n+1)^2 \pi^2}}{4 \ln \sum_{v \in V} f(v)} \right|$.

使用等价的参数方程表述, 则式(25)中的多值函数如式(27)所示:

$$4z \ln \sum_{v \in V} f(v) = 2 \ln \sum_{e \in E} f(e) + i\pi(4n+1) + \sqrt{4 \ln^2 \sum_{e \in E} f(e) + (4n+1)^2 \pi^2} (\cos \theta + i \sin \theta),$$

$$\left(\theta = \tan^{-1} \frac{1}{(2m+1)\pi} \ln \sum_{v \in V} f(v), m, n \in Z \right) \quad (27)$$

式(27)实际上是式(22)所示的直线系与式(26)所示的圆系的交点.

对式(18)的节点权重为负实数、边权重为复数的带权图而言, 其多重分形维数如式(28)所示:

$$FD_{NC} = \frac{1}{(2m+1)^2\pi^2 + \ln^2 \sum_{v \in V} f(v)} \left\{ \ln \sum_{v \in V} f(v) \ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{e \in E} f(e) + (2m+1) \left(2n\pi + \tan^{-1} \frac{b}{a} \right) \pi + \right.$$

$$\left. i \left[\left(2n\pi + \tan^{-1} \frac{b}{a} \right) \ln \sum_{v \in V} f(v) - (2m+1)\pi \ln \sum_{e \in E} \sqrt{a^2 + b^2} f(e) \right] \right\}, (m, n \in Z) \quad (28)$$

显然, 式(28)是一个多值函数, 在复平面中, 其分布在经过同一点的一簇直线的直线系上, 该直线系的方程如式(29)所示:

$$z = \frac{1}{\ln \sum_{v \in V} f(v)} \ln \sum_{e \in E} \sqrt{a^2 + b^2} f(e) + t \left[i \frac{1}{(2m+1)\pi} \ln \sum_{e \in E} \sqrt{a^2 + b^2} f(e) - \frac{1}{\ln \sum_{v \in V} f(v)} \ln \sum_{e \in E} \sqrt{a^2 + b^2} f(e) \right],$$

$$(m \in Z, t \in R) \quad (29)$$

该直线系是一簇经过点 $\left(\frac{1}{\ln \sum_{v \in V} f(v)} \ln \sum_{e \in E} \sqrt{a^2 + b^2} f(e), 0 \right)$ 的直线.

式(28)中的多值函数也可视为分布在多个圆的圆系上, 该圆系的方程如式(30)所示:

$$\left| 2z \ln \sum_{v \in V} f(v) - \ln \sum_{e \in E} \sqrt{a^2 + b^2} f(e) - i \left(2n\pi + \tan^{-1} \frac{b}{a} \right) \right| = \sqrt{\ln^2 \sum_{e \in E} \sqrt{a^2 + b^2} f(e) + \left(2n\pi + \tan^{-1} \frac{b}{a} \right)^2},$$

$$(n \in Z) \quad (30)$$

其圆心为 $\left(\frac{\ln \sum_{e \in E} \sqrt{a^2 + b^2} f(e)}{2 \ln \sum_{v \in V} f(v)}, i \frac{2n\pi + \tan^{-1} \frac{b}{a}}{2 \ln \sum_{v \in V} f(v)} \right)$, 半径为 $\left| \frac{\sqrt{\ln^2 \sum_{e \in E} \sqrt{a^2 + b^2} f(e) + \left(2n\pi + \tan^{-1} \frac{b}{a} \right)^2}}{2 \ln \sum_{v \in V} f(v)} \right|$.

使用等价的参数方程表述, 则式(28)中的多值函数如式(31)所示:

$$2z \ln \sum_{v \in V} f(v) = \ln \sum_{e \in E} \sqrt{a^2 + b^2} f(e) + i \left(2n\pi + \tan^{-1} \frac{b}{a} \right) + \sqrt{\ln^2 \sum_{e \in E} \sqrt{a^2 + b^2} f(e) + \left(2n\pi + \tan^{-1} \frac{b}{a} \right)^2} (\cos \theta + i \sin \theta), \quad (31)$$

$$\left(\theta = \tan^{-1} \frac{1}{(2m+1)\pi} \ln \sum_{v \in V} f(v), m, n \in Z \right)$$

式(31)实际上是式(29)所示的直线系与式(30)所示的圆系的交点.

通过对上述节点权重为负实数的4种不同类型带权图多重分形维数的分析研究可以发现,这四种不同类型的带权图均可以用多个不同的分形维数进行描述.其中,式(19)所示的带权图的多重分形维数分布在一个圆上,该圆如式(20)所示,式(21)、式(25)、式(28)所示的带权图的多重分形维数分布在整个复平面,分别如式(24)、式(27)、式(31)所示,即它们都具备多重分形特性.

2.3 节点权重为纯虚数的带权图分形维数研究 对节点权重为纯虚数的四种不同类型带权图的分形维数(式(32)至式(35))进行研究,在 $[-\pi, \pi]$ 的对称区间内,其分形维数计算结果如表3所示.

表3 节点权重为纯虚数的四种不同类型带权图分形维数统计表

Table 3 Statistics of fractal dimensions of four weighted graphs with node weight being pure imaginary numbers

编号	节点权重	边权重	分形维数
1		正实数 $f(e)$	$\frac{1}{\lg e^{\frac{i\pi}{2}} \sum_{v \in V} f(v)} \lg \sum_{e \in E} f(e)$ (32)
2		负实数 $-f(e)$	$\frac{1}{\lg e^{\frac{i\pi}{2}} \sum_{v \in V} f(v)} \lg e^{i\pi} \sum_{e \in E} f(e)$ (33)
	纯虚数 $if(v)$		
3		纯虚数 $if(e)$	$\frac{1}{\lg e^{\frac{i\pi}{2}} \sum_{v \in V} f(v)} \lg e^{\frac{i\pi}{2}} \sum_{e \in E} f(e)$ (34)
4		复数 $(a+bi)f(e)$	$\frac{1}{\lg e^{\frac{i\pi}{2}} \sum_{v \in V} f(v)} \lg \sqrt{a^2 + b^2} e^{i \tan^{-1} \frac{b}{a}} \sum_{e \in E} f(e)$ (35)

对比表3与表2,可以发现二者较类似,可以直接给出表3对应的四种不同类型带权图的分形维数.

对式(32)的节点权重为纯虚数、边权重为正实数的带权图而言,其多重分形维数如式(36)所示:

$$FD_{IP} = \frac{4}{(4m+1)^2 \pi^2 + 4 \ln^2 \sum_{v \in V} f(v)} \ln f(e) \left[\ln \sum_{v \in V} f(v) - i\pi \left(2m + \frac{1}{2} \right) \right], (m \in Z) \quad (36)$$

显然式(36)是一个多值函数,在复平面中分布在一条曲线上,其曲线方程如式(20)所示.

对式(33)的节点权重为纯虚数、边权重为负实数的带权图而言,其多重分形维数如式(37)所示:

$$FD_{IN} = \frac{4 \ln \sum_{v \in V} f(v) \ln \sum_{e \in E} f(e) + 2(4m+1)(2n+1)\pi^2}{(4m+1)^2 \pi^2 + 4 \ln^2 \sum_{v \in V} f(v)} + i\pi \frac{4(2n+1) \ln \sum_{v \in V} f(v) - 2(4m+1) \ln \sum_{e \in E} f(e)}{(4m+1)^2 \pi^2 + 4 \ln^2 \sum_{v \in V} f(v)}, \quad (37)$$

($m, n \in Z$)

显然,式(37)是一个多值函数,在复平面中,其分布在经过同一点的一簇直线的直线系上,该直线系的方程如式(38)所示:

$$z = \frac{1}{\ln \sum_{v \in V} f(v)} \sum_{e \in E} f(e) + t \left[i \frac{2}{(4m+1)\pi} \sum_{e \in E} f(e) - \frac{1}{\ln \sum_{v \in V} f(v)} \sum_{e \in E} f(e) \right], (m \in Z, t \in R) \quad (38)$$

该直线系是一簇经过点 $\left(\frac{1}{\ln \sum_{v \in V} f(v)} \ln \sum_{e \in E} f(e), 0 \right)$ 的直线.

式(37)中的多值函数也可视为分布在多个圆的圆系上,如式(23)所示.

使用等价的参数方程表述,则式(37)中的多值函数如式(39)所示:

$$2z \ln \sum_{v \in V} f(v) = \ln \sum_{e \in E} f(e) + i\pi(2n+1) + \sqrt{\ln^2 \sum_{e \in E} f(e) + (2n+1)^2 \pi^2} (\cos \theta + i \sin \theta),$$

$$\left(\theta = \tan^{-1} \frac{2}{(4m+1)\pi} \ln \sum_{v \in V} f(v), m, n \in Z \right) \quad (39)$$

式(39)实际上是式(38)所示的直线系与式(23)所示的圆系的交点.

对式(34)的节点权重为纯虚数、边权重为纯虚数的带权图而言,其多重分形维数如式(40)所示:

$$FD_{II} = \frac{4 \ln \sum_{v \in V} f(v) \ln \sum_{e \in E} f(e) + (4m+1)(4n+1)\pi^2}{(4m+1)^2 \pi^2 + 4 \ln^2 \sum_{v \in V} f(v)} + i\pi \frac{2(4n+1) \ln \sum_{v \in V} f(v) - 2(4m+1) \ln \sum_{e \in E} f(e)}{(4m+1)^2 \pi^2 + 4 \ln^2 \sum_{v \in V} f(v)}, \quad (40)$$

($m, n \in Z$)

显然,式(40)是一个多值函数,在复平面中,其分布在经过同一点的一簇直线的直线系上,如式(38)所示.

式(40)中的多值函数也可视为分布在多个圆的圆系上,如式(26)所示.

使用等价的参数方程表述,则式(40)中的多值函数如式(41)所示:

$$4z \ln \sum_{v \in V} f(v) = 2 \ln \sum_{e \in E} f(e) + i\pi(4n+1) + \sqrt{4 \ln^2 \sum_{e \in E} f(e) + (4n+1)^2 \pi^2} (\cos \theta + i \sin \theta),$$

$$\left(\theta = \tan^{-1} \frac{2}{(4m+1)\pi} \ln \sum_{v \in V} f(v), m, n \in Z \right) \quad (41)$$

式(41)实际上是式(38)所示的直线系与式(26)所示的圆系的交点.

对式(35)的节点权重为纯虚数、边权重为复数的带权图而言,其多重分形维数如式(42)所示:

$$FD_{IC} = \frac{1}{(4m+1)^2 \pi^2 + 4 \ln^2 \sum_{v \in V} f(v)} \left\{ 4 \ln \sum_{v \in V} f(v) \ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{e \in E} f(e) + 2(4m+1) \left(2n\pi + \tan^{-1} \frac{b}{a} \right) \pi + \right.$$

$$\left. i \left[4 \left(2n\pi + \tan^{-1} \frac{b}{a} \right) \ln \sum_{v \in V} f(v) - 2(4m+1) \pi \ln \sum_{e \in E} \sqrt{a^2 + b^2} f(e) \right] \right\}, (m, n \in Z) \quad (42)$$

显然,式(42)是一个多值函数,在复平面中,其分布在经过同一点的一簇直线的直线系上,该直线系的方程如式(43)所示:

$$z = \frac{1}{\ln \sum_{v \in V} f(v)} \ln \sum_{e \in E} \sqrt{a^2 + b^2} f(e) + t \left[i \frac{2}{(4m+1)\pi} \ln \sum_{e \in E} \sqrt{a^2 + b^2} f(e) - \frac{1}{\ln \sum_{v \in V} f(v)} \ln \sum_{e \in E} \sqrt{a^2 + b^2} f(e) \right],$$

($m \in Z, t \in R$) (43)

该直线系是一簇经过点 $\left(\frac{1}{\ln \sum_{v \in V} f(v)} \ln \sum_{e \in E} \sqrt{a^2 + b^2} f(e), 0 \right)$ 的直线.

式(42)中的多值函数也可视为分布在多个圆的圆系上,如式(30)所示.

使用等价的参数方程表述,则式(42)中的多值函数如式(44)所示:

$$2z \ln \sum_{v \in V} f(v) = \ln \sum_{e \in E} \sqrt{a^2 + b^2} f(e) + i \left(2n\pi + \tan^{-1} \frac{b}{a} \right) + \sqrt{\ln^2 \sum_{e \in E} \sqrt{a^2 + b^2} f(e) + \left(2n\pi + \tan^{-1} \frac{b}{a} \right)^2} (\cos \theta + i \sin \theta),$$

$$\left(\theta = \tan^{-1} \frac{2}{(4m+1)\pi} \ln \sum_{v \in V} f(v), m, n \in Z \right) \quad (44)$$

式(44)实际上是式(43)所示的直线系与式(30)所示的圆系的交点.

通过对上述节点权重为纯虚数的四种不同类型带权图多重分形维数的分析研究可以发现,这四种不同类型的带权图均可以用多个不同的分形维数进行描述.其中,式(36)所示的带权图的多重分形维数分布在一个圆上,该圆如式(20)所示,式(37)、式(40)、式(42)所示的带权图的多重分形维数分布在整个复平面,分别如式(39)、式(41)、式(44)所示,即它们都具备多重分形特性.

2.4 节点权重为复数的带权图分形维数研究 最后对节点权重为复数的四种不同类型带权图(式(45)至式(48))的分形维数进行研究,同样,在 $[-\pi, \pi]$ 的对称区间内,其分形维数计算结果如表4所示.

表4 节点权重为复数的四种不同类型带权图分形维数统计表

Table 4 Statistics of fractal dimensions of four weighted graphs with node weight being complex numbers

编号	节点权重	边权重	分形维数
1		正实数 $f(e)$	$\frac{1}{\lg \sqrt{a^2 + b^2} e^{i \tan^{-1} \frac{b}{a}} \sum_{v \in V} f(v)} \lg \sum_{e \in E} f(e) \quad (45)$
2	复数 $(a + bi)f(v)$	负实数 $-f(e)$	$\frac{1}{\lg \sqrt{a^2 + b^2} e^{i \tan^{-1} \frac{b}{a}} \sum_{v \in V} f(v)} \lg e^{i\pi} \sum_{e \in E} f(e) \quad (46)$
3		纯虚数 $if(e)$	$\frac{1}{\lg \sqrt{a^2 + b^2} e^{i \tan^{-1} \frac{b}{a}} \sum_{v \in V} f(v)} \lg e^{\frac{i\pi}{2}} \sum_{e \in E} f(e) \quad (47)$
4	复数 $(a + bi)f(e)$	复数 $(a + bi)f(e)$	$\frac{1}{\lg \sqrt{a^2 + b^2} e^{i \tan^{-1} \frac{b}{a}} \sum_{v \in V} f(v)} \lg \sqrt{a^2 + b^2} e^{i \tan^{-1} \frac{b}{a}} \sum_{e \in E} f(e) \quad (48)$

与上述分析方法类似,直接给出表4对应的四种不同类型带权图的分形维数.

对式(45)的节点权重为复数、边权重为正实数的带权图而言,其多重分形维数如式(49)所示:

$$FD_{CP} = \frac{1}{\left(\tan^{-1} \frac{b}{a} + 2m\pi \right)^2 + \ln^2 \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v)} \ln \sum_{e \in E} f(e) \left[\ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v) - i \left(\tan^{-1} \frac{b}{a} + 2m\pi \right) \right], \quad (49)$$

$(m \in Z)$

显然,式(49)是一个多值函数,在复平面中,其分布在一条曲线上,该曲线的方程如式(50)所示:

$$\left| 2z \ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v) - \ln \sum_{e \in E} f(e) \right| = \left| \ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v) \right| \quad (50)$$

该曲线是一个以点 $\left(\frac{\ln \sum_{e \in E} f(e)}{2 \ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v)}, 0 \right)$ 为圆心,以 $\left| \frac{\ln \sum_{e \in E} f(e)}{2 \ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v)} \right|$ 为半径且经过原点的圆.

对式(46)的节点权重为复数、边权重为负实数的带权图而言,其多重分形维数如式(51)所示:

$$FD_{CN} = \frac{\ln \sum_{v \in V} \sqrt{a^2 + b^2} f(v) \ln \sum_{e \in E} f(e) + \left(\tan^{-1} \frac{b}{a} + 2m\pi \right) (2n+1)\pi}{\left(\tan^{-1} \frac{b}{a} + 2m\pi \right)^2 + \ln^2 \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v)} +$$

$$i \frac{(2n+1)\pi \ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v) - \left(\tan^{-1} \frac{b}{a} + 2m\pi \right) \ln \sum_{e \in E} f(e)}{\left(\tan^{-1} \frac{b}{a} + 2m\pi \right)^2 + \ln^2 \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v)}, (m, n \in Z) \quad (51)$$

显然,式(51)是一个多值函数,在复平面中,其分布在经过同一点的一簇直线的直线系上,该直线系的方程如式(52)所示:

$$z = \frac{1}{\ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v)} \ln \sum_{e \in E} f(e) + t \left(i \frac{2}{\tan^{-1} \frac{b}{a} + 2m\pi} \ln \sum_{e \in E} f(e) - \frac{1}{\ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v)} \ln \sum_{e \in E} f(e) \right), \quad (52)$$

($m \in Z, t \in R$)

该直线系是一簇经过点 $\left(\frac{1}{\ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v)} \ln \sum_{e \in E} f(e), 0 \right)$ 的直线.

式(51)中的多值函数也可视为分布在多个圆的圆系上,该圆系的方程如式(53)所示:

$$\left| 2z \ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v) - \ln \sum_{e \in E} f(e) - i\pi(2n+1) \right| = \sqrt{\ln^2 \sum_{e \in E} f(e) + (2n+1)^2 \pi^2}, (n \in Z) \quad (53)$$

其圆心为 $\left(\frac{1}{2 \ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v)} \sum_{e \in E} f(e), i\pi \frac{2n+1}{2 \ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v)} \right)$, 半径为 $\left| \frac{\sqrt{\ln^2 \sum_{e \in E} f(e) + (2n+1)^2 \pi^2}}{2 \ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v)} \right|$.

使用等价的参数方程表述,则式(51)中的多值函数如式(54)所示:

$$2z \ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v) = \ln \sum_{e \in E} f(e) + i\pi(2n+1) + \sqrt{\ln^2 \sum_{e \in E} f(e) + (2n+1)^2 \pi^2} (\cos \theta + i \sin \theta),$$

$$\left(\theta = \tan^{-1} \frac{1}{2m\pi + \tan^{-1} \frac{b}{a}} \ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v), m, n \in Z \right) \quad (54)$$

式(54)实际上是式(52)所示的直线系与式(53)所示的圆系的交点.

对式(47)的节点权重为复数、边权重为纯虚数的带权图而言,其多重分形维数如式(55)所示:

$$FD_{CI} = \frac{\ln \sum_{v \in V} \sqrt{a^2 + b^2} f(v) \ln \sum_{e \in E} f(e) + \left(\tan^{-1} \frac{b}{a} + 2m\pi \right) \left(2n + \frac{1}{2} \right) \pi}{\left(\tan^{-1} \frac{b}{a} + 2m\pi \right)^2 + \ln^2 \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v)} +$$

$$i \frac{\left(2n + \frac{1}{2} \right) \pi \ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v) - \left(\tan^{-1} \frac{b}{a} + 2m\pi \right) \ln \sum_{e \in E} f(e)}{\left(\tan^{-1} \frac{b}{a} + 2m\pi \right)^2 + \ln^2 \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v)}, (m, n \in Z) \quad (55)$$

显然,式(55)是一个多值函数,在复平面中,其分布在经过同一点的一簇直线的直线系上,如式(52)所示. 式(55)中的多值函数也可视为分布在多个圆的圆系上,该圆系的方程如式(56)所示:

$$\left| 4z \ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v) - 2 \ln \sum_{e \in E} f(e) - i\pi(4n+1) \right| = \sqrt{4 \ln^2 \sum_{e \in E} f(e) + (4n+1)^2 \pi^2}, (n \in \mathbb{Z}) \quad (56)$$

$$\text{其圆心为} \left(\frac{\ln \sum_{e \in E} f(e)}{2 \ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v)}, i\pi \frac{4n+1}{4 \ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v)} \right), \text{半径为} \left| \frac{\sqrt{4 \ln^2 \sum_{e \in E} f(e) + (4n+1)^2 \pi^2}}{4 \ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v)} \right|.$$

使用等价的参数方程表述,则式(55)中的多值函数如式(57)所示:

$$4z \ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v) = 2 \ln \sum_{e \in E} f(e) + i\pi(4n+1) + \sqrt{4 \ln^2 \sum_{e \in E} f(e) + (4n+1)^2 \pi^2} (\cos \theta + i \sin \theta), \quad (57)$$

$$\left(\theta = \tan^{-1} \frac{1}{2m\pi + \tan^{-1} \frac{b}{a}} \ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v), m, n \in \mathbb{Z} \right)$$

式(57)实际上是式(52)所示的直线系与式(56)所示的圆系的交点.

对式(48)的节点权重为复数、边权重为复数的带权图而言,其多重分形维数如式(58)所示:

$$FD_{CC} = \frac{\ln \sum_{v \in V} \sqrt{a^2 + b^2} f(v) \ln \sum_{e \in E} \sqrt{a^2 + b^2} f(e) + \left(\tan^{-1} \frac{b}{a} + 2m\pi \right) \left(\tan^{-1} \frac{b}{a} + 2n\pi \right)}{\left(\tan^{-1} \frac{b}{a} + 2m\pi \right)^2 + \ln^2 \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v)} +$$

$$i \frac{\left(\tan^{-1} \frac{b}{a} + 2n\pi \right) \ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v) - \left(\tan^{-1} \frac{b}{a} + 2m\pi \right) \ln \sum_{e \in E} \sqrt{a^2 + b^2} f(e)}{\left(\tan^{-1} \frac{b}{a} + 2m\pi \right)^2 + \ln^2 \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v)}, (m, n \in \mathbb{Z}) \quad (58)$$

显然,式(58)是一个多值函数,在复平面中,其分布在经过同一点的一簇直线的直线系上,该直线系的方程如式(59)所示:

$$z = \frac{1}{\ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v)} \ln \sqrt{a^2 + b^2} f(e) +$$

$$t \left(i \frac{2}{\tan^{-1} \frac{b}{a} + 2m\pi} \ln \sum_{e \in E} \sqrt{a^2 + b^2} f(e) - \frac{1}{\ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v)} \ln \sum_{e \in E} \sqrt{a^2 + b^2} f(e) \right), (m \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}) \quad (59)$$

该直线系是一簇经过点 $\left(\frac{1}{\ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v)} \ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{e \in E} f(e), 0 \right)$ 的直线.

式(58)中的多值函数也可视为分布在多个圆的圆系上,该圆系的方程如式(60)所示:

$$\left| 2z \ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v) - \ln \sum_{e \in E} \sqrt{a^2 + b^2} f(e) - i \left(2n\pi + \tan^{-1} \frac{b}{a} \right) \right| =$$

$$\sqrt{\ln^2 \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{e \in E} f(e) + \left(2n\pi + \tan^{-1} \frac{b}{a} \right)^2}, (n \in \mathbb{Z}) \quad (60)$$

$$\text{其圆心为} \left(\frac{\ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{e \in E} f(e)}{2 \ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v)}, i \frac{2n\pi + \tan^{-1} \frac{b}{a}}{2 \ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v)} \right), \text{半径为} \left| \frac{\sqrt{\ln^2 \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{e \in E} f(e) + \left(2n\pi + \tan^{-1} \frac{b}{a} \right)^2}}{2 \ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v)} \right|.$$

使用等价的参数方程表述,则式(58)中的多值函数如式(61)所示:

$$2z \ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v) =$$

$$\ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{e \in E} f(e) + i \left(2n\pi + \tan^{-1} \frac{b}{a} \right) + \sqrt{\ln^2 \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{e \in E} f(e) + \left(2n\pi + \tan^{-1} \frac{b}{a} \right)^2} (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\left(\theta = \tan^{-1} \frac{1}{2m\pi + \tan^{-1} \frac{b}{a}} \ln \sqrt{a^2 + b^2} \sum_{v \in V} f(v), m, n \in Z \right)$$
(61)

式(61)实际上是式(59)所示的直线系与式(60)所示的圆系的交点.

通过对上述节点权重为复数的四种不同类型带权图多重分形维数的分析研究可以发现,这四种不同类型的带权图均可以用多个不同的分形维数进行描述.其中,式(49)所示的带权图的多重分形维数分布在一个圆上,该圆如式(50)所示,式(51)、式(55)、式(58)所示的带权图的多重分形维数分布在复平面,分别如式(54)、式(57)、式(61)所示,即它们都具备多重分形特性.

综上,对节点权重及边权重分别为正实数、负实数、纯虚数及复数等多种不同类型的带权图的多重分形特性进行了分析研究.可以发现,在16种带权图中,有15种带权图具备多重分形特性,而且6种带权图的多重分形维数呈线状分布;其中,3种带权图的多重分形维数分布在一条直线上,3种带权图的多重分形维数分布在一个圆上,9种带权图的多重分形维数分布在复平面.16种带权图的多重分形统计如表5所示.

3 结 论

分形理论为分析研究客观事物提供了新的视角.多重分形是分形理论研究的重要内容,对多重分形在带权图中的研究与应用进行了探讨.针对带权图中的节点权重及边权重可以为正实数、负实数、纯虚数及复数等不同情形,分别给出对应的16种带权图的分形维数分析结果,并给出每一种带权图的分形维数,将带权图的分形维数由实数域推广到复数域.可以发现,在16种不同的带权图中,有15种带权图具备多重分形的特性,而且6种带权图的分形维数呈线状分布,9种带权图的分形维数呈面状分布.后续研究的重点在于深入分析带权图中的多重分形特性,并研究各类不同权重对应的带权图多重分形维数之间的关联.

表5 16种不同类型带权图多重分形统计表

Table 5 Statistics of multi-fractals of 16 weighted graphs

编号	节点权重	边权重	多重分形维数分布	备注
1		正实数 $f(e)$	—	单分形
2	正实数	负实数 $-f(e)$	直线	
3	$f(v)$	纯虚数 $if(e)$	直线	平行于虚轴
4		复数 $(a+bi)f(e)$	直线	
5		正实数 $f(e)$	圆	经过原点
6	负实数	负实数 $-f(e)$	直线系/圆系	
7	$-f(v)$	纯虚数 $if(e)$	直线系/圆系	整个复平面
8		复数 $(a+bi)f(e)$	直线系/圆系	
9		正实数 $f(e)$	圆	经过原点
10	纯虚数	负实数 $-f(e)$	直线系/圆系	
11	$if(v)$	纯虚数 $if(e)$	直线系/圆系	整个复平面
12		复数 $(a+bi)f(e)$	直线系/圆系	
13		正实数 $f(e)$	圆	经过原点
14	复数	负实数 $-f(e)$	直线系/圆系	
15	$(a+bi)f(v)$	纯虚数 $if(e)$	直线系/圆系	整个复平面
16		复数 $(a+bi)f(e)$	直线系/圆系	

参考文献

- [1] Erdos P, Renyi A. On random graphs I. Publicationes Mathematicae, 1959, 6: 290—297.
- [2] Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of 'small-world' networks. Nature, 1998, 393: 440—442.
- [3] Newman M E J, Watts D J. Renormalization group analysis of the small-world network model. Physics Letter A. 1999, 293: 341—346.
- [4] Barabasi A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks. Science, 1999, 286: 509—512.
- [5] 熊文海, 高齐圣, 张嗣瀛. 复杂网络的邻接矩阵及其特征谱. 武汉理工大学学报(交通科学与工程版), 2009, 33(1): 83—86. (Xiong W H, Gao Q S, Zhang S)

- Y. Adjacency matrix and spectral density of complex networks. *Journal of Wuhan University of Technology(Transportation Science & Engineering)*, 2009, 33(1):83—86.)
- [6] Song C, Jalvin S, Makse H A. Self-similarity of complex networks. *Nature*, 2005, 433:392—395.
- [7] Andre M B. On a class of fractal matrices (I) Excess-Matrices and their self-similar properties. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1992, 2(4):841—860.
- [8] 刘胜久,李天瑞,洪西进等.基于矩阵运算的复杂网络构建方法. *中国科学:信息科学*, 2016, 46(5):610—626. (Liu S J, Li T R, Horong S J, et al. Complex network construction based on matrix operation. *Scientia Sinica Informationis*, 2016, 46(5):610—626.)
- [9] 刘胜久,李天瑞,刘小伟.网络维数:一种度量复杂网络的新方法. *计算机科学*, 2019, 46(1):51—56. (Liu S J, Li T R, Liu X W. Network network dimension: a new measure for complex networks. *Computer Science*, 2019, 46(1):51—56.)
- [10] 张先迪,李正良.图论及其应用.北京:高等教育出版社,2005,297.
- [11] Balka R, Buczolic Z, Elekes M. A new fractal dimension: the topological Hausdorff dimension. *Advances in Mathematics*, 2015, 274(1):881—927.
- [12] Sreenivasan K R, Meneveau C. The fractal facets of turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 1986, 173(173):357—386.
- [13] Harte D. *Multifractals: theory and applications*. Chapman & Hall/CRC, 2001, 364.
- [14] 赵静湑,陈彦光,李双成.京津冀城市用地形态的双分形特征及其演化. *地理科学进展*, 2019, 38(1):77—87. (Zhao J T, Chen Y G, Li S C. Bi-fractal structure and evolution of the Beijing-Tianjin-Hebei region urban land-use patterns. *Progress in Geography*, 2019, 38(1):77—87.)
- [15] Song Y Q, Liu J L, Yu Z G, et al. Multifractal analysis of weighted networks by a modified sandbox algorithm. *Scientific Reports*, 2015(5):17628.
- [16] Liu J L, Wang J, Yu Z G, et al. Fractal and multifractal analyses of bipartite networks. *Scientific Reports*, 2017(7):45588.

(责任编辑 杨可盛)