第 55 卷　第 4 期
2019 年 7 月

南京大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF NANJING UNIVERSITY
(NATURAL SCIENCE)

Vol. 55, No. 4
July, 2019

DOI:10. 13232/j. cnki. jnju. 2019. 04. 005

基于条件属性蕴含的概念格构造及简化

王　霞[1,2*],谭斯文[1],李俊余[1,2],吴伟志[1,2]
(1.浙江海洋大学数理与信息学院,舟山,316022;
2.浙江省海洋大数据挖掘与应用重点实验室,浙江海洋大学,舟山,316022)

摘　要:基于三元背景研究三类概念格的构造和简化. 首先,基于三元背景构造一个条件属性蕴含形式背景,该背景以三元背景属性集上的属性蕴含为对象,以三元背景的条件为属性. 并针对条件属性蕴含形式背景给出形式概念的定义,构造相应的概念格. 其次,由于条件属性蕴含形式背景中对象的个数随着三元背景中属性个数的增加呈指数级增长,这使得条件属性蕴含形式背景往往是一个比较大的数据表,因此,对条件属性蕴含形式背景进行对象约简,将原来的对象集替换为单个条件下形式背景的极小属性蕴含构成的集合. 该对象约简方法不仅在很大程度上简化了条件属性蕴含形式背景,而且简化后的形式背景对应的概念格与原来的概念格同构. 最后,在条件属性蕴含形式背景上引入了可能性算子和必然性算子,在此基础上定义了对象定向概念格和属性定向概念格.

关键词:概念格,三元背景,条件属性蕴含,对象定向概念格,属性定向概念格

中图分类号:TP301　　　　**文献标识码:**A

Constructions and simplifications of concept lattices based on conditional attribute implications

Wang Xia[1,2*], Tan Siwen[1], Li Junyu[1,2], Wu Weizhi[1,2]
(1. School of Mathematics, Physics and Information Science, Zhejiang Ocean University, Zhoushan, 316022, China;
2. Key Laboratory of Oceanographic Big Data Mining and Application of Zhejiang Province,
Zhejiang Ocean University, Zhoushan, 316022, China)

Abstract: Constructions and simplifications of three types of concept lattice are studied based on a triadic context. Firstly, a new formal context is constructed based on conditional attribute implications, which takes the implications between attributes of the triadic context as the objects and the conditions of the triadic context as the attributes. Then definitions of formal concept and concept lattice are given in the conditional attribute implication context. Secondly, since the number of objects in the conditional attribute implication context increases exponentially with the increase of the number of attributes in the triadic context, which makes the conditional attribute implication context usually becomes a large data table. The object reduction of the conditional attribute implication context is carried out, and the original object set is replaced with the set of minimal attribute implications of the formal context under each single condition. It is shown that the object reduction method can simplify the conditional attribute implication context to a great extent, and the concept lattice corresponding to the simplified context is isomorphic to the original concept lattice. Finally, the

基金项目:国家自然科学基金(61202206,61573321,41631179,61773349),浙江省自然科学基金(LY18F030017)
收稿日期:2019－05－28
* 通讯联系人,E-mail:bblylm@126.com

possibility operator and necessary operator are introduced in the conditional attribute implication context to define the object oriented concept lattice and property oriented concept lattice of the new context.

Key words: concept lattice, triadic context, conditional attribute implication, object oriented concept lattice, property oriented concept lattice

三元概念分析是由 Lehmann and Wille[1−2] 于 1995 年提出的，它可以看作是形式概念分析[3−4]的一种自然扩展．目前，三元概念分析主要集中在三元概念和概念三元格的构造、三元蕴含及关联规则挖掘、三元模态算子、三元概念聚类、三元背景的因子分析、模糊化、三元概念模型推广和约简及应用等方面，取得了一些研究成果．Wei et al[5−6]综述了有关三元概念分析的基本理论、方法及应用等相关研究内容．

属性蕴含是描述某些属性依赖关系的特定表达式，是形式概念分析的重要研究课题之一．1982 年 Ganter and Wille[4]定义形式背景上属性蕴含 $A\rightarrow B$ 表示每个具有 A 中属性的对象一定具有 B 中属性．近年，属性蕴含相关的问题引起了许多学者的广泛关注，取得了一些研究成果[7−15]．1998 年 Biedermann[16]将属性蕴含的思想引入三元概念分析，定义了在某个条件集下的属性间的三元蕴含．2004 年 Ganter and Obiedkov[17]定义了一种新的条件属性蕴含并进一步定义了属性条件蕴含和属性×条件蕴含，基于条件属性蕴含构造一个形式背景，给出了形式概念的描述性定义．Glodeanu[18]定义了一种模糊值三元背景，并定义了模糊值条件属性蕴含、模糊值属性条件蕴含和模糊值属性×条件蕴含．Mora et al[19]和 Rodríguez-Lorenzo[20]研究了三元概念分析中条件属性蕴含的公理系统和推理系统．

本文受 Ganter and Obiedkov[17]的启发，基于一个三元背景构造条件属性蕴含形式背景，并定义该背景的形式概念，构造相应的概念格．考虑到条件属性蕴含形式背景中对象的个数随着三元背景中属性个数的增长呈指数级增长，因此在实际应用中条件属性蕴含形式背景往往是一个比较大的数据表．本文对条件属性蕴含形式背景的对象进行了约简，从而使形式背景和形式概念的表示更加简洁，并且该约简方法可使简化后的形式背景对应的概念格与原来的概念格同构．最后，在条件属性蕴含形式背景中引入可能性算子和必然性算子，构造了对象定向概念格和属性定向概念格．

1 相关理论

1.1 形式概念分析相关知识

定义 1[3] 称 $T:=(G,M,I)$ 为一个形式背景，其中，G 是一个对象集，M 是一个属性集，I 是 G 和 M 之间的一个关系．分别称 G 和 M 的元素为对象和属性．

若对象 g 和属性 m 具有关系 I，则记为 $(g,m)\in I$ 或 gIm．

定义 2[3] 设 $T=(G,M,I)$ 为形式背景，$X\subseteq G,B\subseteq M$．若二元组 (X,B) 满足 $X'=B$，$B'=X$，则称 (X,B) 为形式概念，其中：

$$X'=\{m\in M|\forall g\in X,\ (g,m)\in I\}$$
$$B'=\{g\in G|\forall m\in B,\ (g,m)\in I\}$$

设 $T=(G,M,I)$ 是形式背景，对任意的形式概念 (X_1,B_1)，(X_2,B_2) 定义如下偏序关系：

$$(X_1,B_1)\leqslant(X_2,B_2)\Leftrightarrow X_1\subseteq X_2\ (\Leftrightarrow B_1\supseteq B_2) \tag{1}$$

记 $L(G,M,I)$ 或 $L(T)$ 为 $T=(G,M,I)$ 中所有形式概念构成的集合，则 $L(T)$ 是格，称其为 T 的概念格．在概念格 $L(T)$ 上定义上、下确界如下：

$$(X_1,B_1)\wedge(X_2,B_2)=\left(X_1\cap X_2,(B_1\cup B_2)''\right) \tag{2}$$
$$(X_1,B_1)\vee(X_2,B_2)=\left((X_1\cup X_2)'',B_1\cap B_2\right) \tag{3}$$

则概念格 $\left(L(T),\wedge,\vee\right)$ 是一个完备格．

$\forall g\in G,\forall m\in M$，分别称 $(\{g\}'',\{g\}')$ 和 $(\{m\}',\{m\}'')$ 为对象概念和属性概念．

定义 3[3] 设 $T=(G,M,I)$ 是形式背景，

$\forall A,B\subseteq M$. 称二元有序对(A,B)为集合M上的属性蕴含,记为$A\rightarrow B$,读作"A蕴含B". 分别称A和B为属性蕴含$A\rightarrow B$的前件和结论. 称属性蕴含$A\rightarrow B$在T中成立,若它满足条件:$\forall g\in G$,g具有A中所有属性,则g具有B中所有属性.

若$B\subseteq A\subseteq M$,则属性蕴含$A\rightarrow B$在T中成立,此时称属性蕴含$A\rightarrow B$是平凡的. 若$A'=\varnothing$,则称属性蕴含$A\rightarrow B$的前件是假的.

根据定义3,$\forall A,B\subseteq M$,属性蕴含$A\rightarrow B$在T中成立当且仅当$\forall m\in B$,$A\rightarrow\{m\}$在T中成立.

因此,下文只考虑$A\rightarrow\{m\}$形式的非平凡属性蕴含,简记为$A\rightarrow m$. 记$Imp(T)$为在形式背景T中成立的非平凡属性蕴含构成的集合,即 $Imp(T)=\{A\rightarrow m|m\in M\backslash A,A\rightarrow m$在$T$中成立$\}$.

1.2 三元概念分析相关知识

定义4[1] 称 $\mathbb{K}=(K_1,K_2,K_3,Y)$为三元背景,其中$K_1,K_2,K_3$为非空集合,$Y$为$K_1,K_2,K_3$之间的关系,即$Y\subseteq K_1\times K_2\times K_3$. 分别称$K_1,K_2,K_3$为对象集、属性集和条件集. 分别称$K_1,K_2,K_3$的元素为对象、属性和条件.

若对象g、属性m和条件c具有关系Y,则记为$(g,m,c)\in Y$,表示对象g在条件c下具有属性m.

设$\mathbb{K}=(K_1,K_2,K_3,Y)$是一个三元背景,$\forall A_1\subseteq K_1$, $\forall A_2\subseteq K_2$, $\forall A_3\subseteq K_3$,称三元组(A_1,A_2,A_3)为一个三元概念,若满足$A_1\times A_2\times A_3\subseteq Y$且$\forall X_1\subseteq K_1,\forall X_2\subseteq K_2,\forall X_3\subseteq K_3$,$X_1\times X_2\times X_3\subseteq Y$,当$A_1\subseteq X_1,A_2\subseteq X_2,A_3\subseteq X_3$时总有$(A_1,A_2,A_3)=(X_1,X_2,X_3)$. 此时分别称$A_1,A_2,A_3$为三元概念$(A_1,A_2,A_3)$的外延、内涵和模式.

由定义1、定义2和定义4可知,三元背景和三元概念分别是形式背景和形式概念的扩展,因此形式概念分析和三元概念分析在研究方法和研究内容等方面都有着紧密的联系[21-25]. 形式概念分析的研究对象是形式背景,它是一个二维数据表,当遇到三维数据或基于条件下的二维数据时,三元概念分析则有效地扩展和提升了形式概念分析的信息处理能力. 目前,三元概念分析在folksonomy分类[26-28]、认知系统[29]、文本分类[30]、联盟应用[31]、动态社会网络[32]、访问控制[33]等方面也取得了一些研究成果.

定义5[17] 设$\mathbb{K}=(K_1,K_2,K_3,Y)$为三元背景,$\forall A,B\subseteq K_2,\forall C\subseteq K_3$. 称$A\overset{C}{\rightarrow}B$为基于三元背景的条件属性蕴含,读作"在$C$中所有条件下$A$蕴含$B$". 称条件属性蕴含$A\overset{C}{\rightarrow}B$在三元背景$\mathbb{K}$中成立,若它满足条件:在每一个条件$c\in C$下,当$\forall g\in K_1$,$g$具有$A$中所有属性时,$g$具有$B$中所有属性.

定义6 设$\mathbb{K}=(K_1,K_2,K_3,Y)$为三元背景,$\forall C\subseteq K_3$. 称$\mathbb{K}_C:=(K_1,K_2,Y_C)$为在条件子集$C$下的形式背景,其中$\forall g\in K_1$, $m\in K_2$, $(g,m)\in Y_C$当且仅当$\forall c\in C$, $(g,m,c)\in Y$.

若$B\subseteq A\subseteq K_2$,则条件属性蕴含$A\overset{C}{\rightarrow}B$在$\mathbb{K}$中成立,此时称$A\overset{C}{\rightarrow}B$是平凡的. 若$A'^C=\varnothing$,则称$A\overset{C}{\rightarrow}B$的前件是假的.

根据定义5可得,条件属性蕴含$A\overset{C}{\rightarrow}B$在$\mathbb{K}$中成立当且仅当$\forall m\in B$,$A\overset{C}{\rightarrow}\{m\}$在$\mathbb{K}$中成立.

类似的,以下只考虑$A\overset{C}{\rightarrow}\{m\}$形式的条件属性蕴含,将其简记为$A\overset{C}{\rightarrow}m$,并记:

$$Imp_C(\mathbb{K}):=\{A\overset{C}{\rightarrow}m|A\subseteq K_2,m\in K_2\backslash A,C\subseteq K_3,A\overset{C}{\rightarrow}m在\mathbb{K}中成立\}$$

例1 表1给出了一个三元背景$\mathbb{K}=(K_1,K_2,K_3,Y)$,其中对象集$K_1=\{g_1,g_2\}$,属性集$K_2=\{m_1,m_2,m_3\}$,条件集$K_3=\{c_1,c_2,c_3\}$. 根据定义6可得在条件$c_1$下的形式背景$\mathbb{K}_{c_1}=(K_1,K_2,Y_{c_1})$,如表2所示.

根据定义2可知,表2中形式背景$\mathbb{K}_{c_1}$有四个形式概念,分别为:$(K_1,\varnothing)$,$(\{g_1\},\{m_1,m_3\})$,$(\{g_2\},\{m_2\})$,$(\varnothing,K_2)$

根据定义3可得,在形式背景$\mathbb{K}_{c_1}$中成立的非平凡属性蕴含集为:

$$Imp(\mathbb{K}_{c_1})=\{m_1\to m_3, m_3\to m_1,\{m_1,m_2\}\to m_3,\{m_2,m_3\}\to m_1\}$$

取条件子集$C=\{c_1,c_3\}$,则根据定义5可得在三元背景$\mathbb{K}$中成立的非平凡条件属性蕴含集为:

$$Imp_C(K_2)=\{m_3\xrightarrow{C}m_1,\ \{m_2,m_3\}\xrightarrow{C}m_1\}$$

表1 三元背景

Table 1 A triadic context

	c_1			c_2			c_3		
	m_1	m_2	m_3	m_1	m_2	m_3	m_1	m_2	m_3
g_1	1	0	1	0	1	1	1	0	1
g_2	0	1	0	1	1	0	1	1	0

表2 在条件c_1下的形式背景$\mathbb{K}_{c_1}$

Table 2 The formal context $\mathbb{K}_{c_1}$ under the condition c_1

	m_1	m_2	m_3
g_1	1	0	1
g_2	0	1	0

2 基于条件属性蕴含的概念格

定义7 设$\mathbb{K}=(K_1,K_2,K_3,Y)$为三元背景,记$imp(K_2)=\{A\to m|A\subseteq K_2, m\in K_2\backslash A\}$,称形式背景$\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})=(imp(K_2),K_3,R)$为基于$\mathbb{K}$的条件属性蕴含形式背景,其中$\forall A\to m\in imp(K_2)$,$\forall c\in K_3$,$(A\to m,\ c)\in R$当且仅当$A\xrightarrow{c}m\in Imp_c(\mathbb{K})$.

条件属性蕴含形式背景$\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$的对象为三元背景$\mathbb{K}$的属性集$K_2$上的属性蕴含,属性为三元背景$\mathbb{K}$的条件集$K_3$中的条件.

定义8 设$\mathbb{K}=(K_1,K_2,K_3,Y)$为三元背景,$\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})=(imp(K_2),K_3,R)$为基于$\mathbb{K}$的条件属性蕴含形式背景,$\forall\wp\subseteq imp(K_2)$,$\forall C\subseteq K_3$.若二元组$(\wp,C)$满足:$\wp'=C$,$C'=\wp$,则称$(\wp,C)$为条件属性蕴含形式背景$\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$的形式概念,此时分别称$\wp$和$C$为形式概念$(\wp,C)$的外延和内涵.其中,

$$\wp'=\{c\in K_3|\forall A\to m\in\wp,\ (A\to m,\ c)\in R\}$$

$$C'=\{A\to m\in imp(K_2)|\forall c\in C,\ (A\to m,\ c)\in R\}$$

对任意的概念$(\wp_1,C_1)$,$(\wp_2,C_2)$定义偏序关系:

$$(\wp_1,C_1)\leqslant(\wp_2,C_2)\Leftrightarrow\wp_1\subseteq\wp_2(\Leftrightarrow C_1\supseteq C_2)$$

记$L(\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))$为$\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$中所有概念构成的集合,在$L(\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))$上定义上、下确界:

$$(\wp_1,C_1)\wedge(\wp_2,C_2)=(\wp_1\cap\wp_2,(C_1\cup C_2)'') \quad (4)$$

$$(\wp_1,C_1)\vee(\wp_2,C_2)=((\wp_1\cup\wp_2)'',C_1\cap C_2) \quad (5)$$

则$(L(\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})),\wedge,\vee)$是一个完备格,称其为条件属性蕴含形式背景$\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$的概念格.

根据定义3、定义5和定义6知,$A\to m\in Imp(\mathbb{K}_C)$当且仅当$A\xrightarrow{C}m\in Imp_C(\mathbb{K})$.

注1 设$\mathbb{K}=(K_1,K_2,K_3,Y)$为三元背景,$\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$为条件属性蕴含形式背景,由定义8知,$\forall c\in K_3$,$\{c\}'=Imp(\mathbb{K}_c)$.

注2 $\forall(\wp,C)\in L(\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))$.若$C\neq\varnothing$,则根据式(4)知:

$$\wp=\bigcap\{\{c\}'|c\in C\}=\bigcap\{Imp(\mathbb{K}_c)|c\in C\}$$

例2 表1对应的条件属性蕴含形式背景$\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})=(imp(K_2),K_3,R)$如表3所示,其中:

$$imp(K_2)=\{\varnothing\to m_1,\varnothing\to m_2,\varnothing\to m_3, m_1\to m_2,m_1\to m_3,m_2\to m_1,m_2\to m_3, m_3\to m_1,m_3\to m_2,\{m_1,m_2\}\to m_3, \{m_1,m_3\}\to m_2,\{m_2,m_3\}\to m_1\}$$

首先,计算条件属性蕴含形式背景$\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$的三个属性概念如下:

$$C_1:=(\{c_1\}',\{c_1\}'')=(\{m_1\to m_3,\ m_3\to m_1,\{m_1,m_2\}\to m_3,\{m_2,m_3\}\to m_1\},\{c_1\})$$

$$C_2:=(\{c_2\}',\{c_2\}'')=(\{\varnothing\to m_2,\ m_1\to m_2,\ m_3\to m_2,\ \{m_1,m_3\}\to m_2\},\{c_2\})$$

$$C_3:=(\{c_3\}',\{c_3\}'')=(\{\varnothing\to m_1,\ m_2\to m_1,\ m_3\to m_1,\ \{m_2,m_3\}\to m_1\},\{c_3\})$$

其次,根据式(4)和式(5)计算剩余的三个概念:

表3　条件属性蕴含形式背景 $\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$

Table 3　The conditional attribute formal context $\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$

	c_1	c_2	c_3
$\varnothing \to m_1$	0	0	1
$\varnothing \to m_2$	0	1	0
$\varnothing \to m_3$	0	0	0
$m_1 \to m_2$	0	1	0
$m_1 \to m_3$	1	0	0
$m_2 \to m_1$	0	0	1
$m_2 \to m_3$	0	0	0
$m_3 \to m_1$	1	0	1
$m_3 \to m_2$	0	1	0
$\{m_1,m_2\} \to m_3$	1	0	0
$\{m_1,m_3\} \to m_2$	0	1	0
$\{m_2,m_3\} \to m_1$	1	0	1

$$C_4:=(\{c_1\}',\{c_1\}'')\wedge(\{c_3\}',\{c_3\}'')=$$
$$(\{m_3\to m_1,\{m_2,m_3\}\to m_1\},\{c_1,c_3\})$$
$$C_5:=(\{c_1\}',\{c_1\}'')\wedge(\{c_2\}',\{c_2\}'')\wedge$$
$$(\{c_3\}',\{c_3\}'')=(\varnothing,K_3)$$
$$C_6:=(\{c_1\}',\{c_1\}'')\vee(\{c_2\}',\{c_2\}'')\vee$$
$$(\{c_3\}',\{c_3\}'')=(imp(K_2),\varnothing)$$

所有概念对应的概念格 $L(\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))$ 如图1所示.

注3　若三元背景 $\mathbb{K}=(K_1,K_2,K_3,Y)$ 的属性集 K_2 有 $n(n\geqslant 1)$ 个属性,则条件属性蕴含背景 $\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$ 的对象集 $imp(K_2)$ 有 $n\cdot 2^{n-1}$ 个元素,因此随着 n 的增大 $imp(K_2)$ 的元素个数呈指数级增长.例如当 $n=5$ 时,$imp(K_2)$ 有80个元素;当 $n=6$ 时,$imp(K_2)$ 有192个元素……鉴于此,下面考虑对条件属性蕴含背景 $\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$ 的对象做适当的约简.

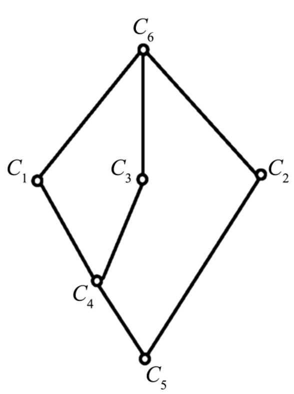

图1　概念格 $L(\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))$

Fig. 1　The concept lattice $L(\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))$

设 $T=(G,M,I)$ 是形式背景,根据定义3知,$\forall A\to m\in Imp(T)$,$\forall B\subseteq M$,若 $A\subseteq B$,则 $B\to m\in Imp(T)$.

定义9　设 $T=(G,M,I)$ 是形式背景,$\forall A\to m\in Imp(T)$ 总存在 $A_0\subseteq A$ 满足:$A_0\to m\in Imp(T)$ 且 $\forall A_1\subseteq A$,若 $A_1\subset A_0$,则 $A_1\to m\notin Imp(T)$,此时称 $A_0\to m$ 为关于 $A\to m$ 的极小属性蕴含.

记 $\mathrm{Min}Imp(T)$ 为形式背景 T 的所有极小属性蕴含构成的集合.显然有:

$$Imp(T)=$$
$$\{A\to m|\exists A_0\to m\in \mathrm{Min}Imp(T)\text{使得}A_0\subseteq A\}$$

定义10　设 $\mathbb{K}=(K_1,K_2,K_3,Y)$ 为三元背景,$\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})=(imp(K_2),K_3,R)$ 为基于 $\mathbb{K}$ 的条件属性蕴含形式背景.

称 $\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K})=(Simp(K_2),K_3,R^{Simp(K_2)})$ 为 $\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$ 的简化背景,其中,

$$Simp(K_2)=$$
$$\{A\to m|\exists c\in K_3,A\to m\in \mathrm{Min}Imp(\mathbb{K}_c)\}$$

注4　$\forall A\to m\in Simp(K_2)$,$\forall c\in K_3$,$(A\to m,c)\in R^{Simp(K_2)}$ 当且仅当 $A\xrightarrow{c} m\in Imp_c(\mathbb{K})$.

显然有 $(A\to m,c)\in R^{Simp(K_2)}$ 当且仅当 $A\to m\in Imp(\mathbb{K}_c)\cap Simp(K_2)$.

注5　根据定义10知:

$$Simp(K_2)=\bigcup\{\mathrm{Min}Imp(\mathbb{K}_c)|c\in K_3\},$$
$$\forall \wp\in Simp(K_2),\forall C\subseteq K_3$$

记:

$$\wp^{'Simp(K_2)}:=\{c\in K_3|\forall A\to m\in\wp,$$
$$(A\to m,c)\in R^{Simp(K_2)}\}=\wp'$$
$$C^{'Simp(K_2)}:=\{A\to m\in Simp(K_2)|\forall c\in C,$$
$$(A\to m,c)\in R^{Simp(K_2)}\}=$$
$$C'\cap Simp(K_2)$$

注 6 对比定义 7 和定义 10 可知,条件属性蕴含形式背景 $\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$ 和简化背景 $\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K})$ 的对象集不同,而且简化背景 $\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K})$ 的对象集 $Simp(K_2)$ 所包含的元素个数明显比原背景中对象集 $imp(K_2)$ 少得多. 事实上,设 $\exists c\in K_3$ 使 $A\rightarrow m\in \mathrm{Min}Imp(\mathbb{K}_c)$,且不妨设 $|A|=s$,则根据定义 9 可知,$\forall B\subseteq K_2$,若 $B\subset A$ 或 $A\subset B$ 则 $B\rightarrow m\notin \mathrm{Min}Imp(\mathbb{K}_c)$ 且 $B\rightarrow m\in imp(\mathbb{K}_c)$. 而这样的属性子集共有 $(2^s+2^{n-s-1}-2)$ 个,而且可以验证当 $s=\dfrac{n-1}{2}$ 时,$2^s+2^{n-s-1}-2=2\cdot\left(2^{\frac{n-1}{2}}-1\right)$ 达到最小值. 即若一个极小属性蕴含的前件含有 s 个属性,则可以从 $imp(\mathbb{K}_c)$ 中剔除掉 $(2^s+2^{n-s-1}-2)$ 个属性蕴含,且至少剔除掉 $2\cdot\left(2^{\frac{n-1}{2}}-1\right)$ 个,因此简化后的背景 $\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K})$ 在很大程度上降低了对象的个数.

引理 1 设 $\mathbb{K}=(K_1,K_2,K_3,Y)$ 为三元背景,$\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$ 为条件属性蕴含背景,$\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K})$ 为 $\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$ 的简化背景,$\forall \wp\subseteq imp(K_2)$,$\forall C\subseteq K_3$. 若 $(\wp,C)\in L(\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K}))$,则:

$$(\wp\cap \mathrm{Simp}(K_2),C)\in L(\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K}))$$

证 明 因为 $(\wp,C)\in L(\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K}))$,则:

$$C^{'Simp(K_2)}=C'\cap Simp(K_2)=\wp\cap Simp(K_2)$$

又因为:

$$(\wp\cap Simp(K_2))^{'Simp(K_2)}=(\wp\cap Simp(K_2))'$$

所以有:

$$\wp'\subseteq(\wp\cap Simp(K_2))'=(\wp\cap Simp(K_2))^{'Simp(K_2)}$$

另一方面,若 $\wp\cap Simp(K_2)=\wp$,则:

$$(\wp\cap Simp(K_2))^{'Simp(K_2)}=(\wp\cap Simp(K_2))'=\wp'=C$$

于是:

$$(\wp\cap \mathrm{Simp}(K_2),C)\in L(\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K}))$$

若 $\wp\cap Simp(K_2)\neq\wp$,则:$\forall A\rightarrow m\in\wp\backslash Simp(K_2)$ 存在 $A_0\subseteq K_2$ 满足 $A_0\subset A$ 且 $A_0\rightarrow m\in\wp\cap Simp(K_2)$.

因此:

$$\forall c\in(\wp\cap Simp(K_2))^{'Simp(K_2)}=(\wp\cap Simp(K_2))'$$

有 $A_0\xrightarrow{c} m\in Imp_c(\mathbb{K})$.

所以:

$$A\xrightarrow{c} m\in Imp_c(\mathbb{K}),即\ c\in(\wp\backslash Simp(K_2))'$$

于是,

$$(\wp\cap Simp(K_2))'\subseteq(\wp\backslash Simp(K_2))'$$

即:

$$(\wp\cap Simp(K_2))'=\wp'=C$$

所以:

$$(\wp\cap Simp(K_2),C)\in L(\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K}))$$

证毕.

定理 1 设 $\mathbb{K}=(K_1,K_2,K_3,Y)$ 为三元背景,$\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$ 为条件属性蕴含背景,$\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K})$ 为 $\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$ 简化背景,则概念格 $L(\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))$ 与概念格 $L(\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K}))$ 同构.

证 明 设:

$f(\wp,C)=(\wp\cap Simp(K_2),C)$,$\forall(\wp,C)\in L(\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))$,则由引理 1 知 f 是 $L(\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))$ 到 $L(\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K}))$ 的映射,且为单射.

$\forall(\wp,C)\in L(\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K}))$,令:

$$\wp_1=\wp\cup\{B\rightarrow m\mid\exists A\rightarrow m\in\wp 使得 A\subset B 且 m\notin B\}$$

则有:

$$(\wp_1,C)\in L(\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))$$

且

$$f((\wp_1,C))=(\wp_1\cap Simp(K_2),C)=(\wp,C)$$

即 f 为 $L(\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))$ 到 $L(\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K}))$ 的满射.

于是,f 是 $L(\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))$ 到 $L(\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K}))$ 的双射.

此外,$\forall(\wp_1,C_1),(\wp_2,C_2)\in L(\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))$

$$\begin{aligned}f((\wp_1,C_1)\wedge(\wp_2,C_2))&=f(\wp_1\cap\wp_2,(C_1\cup C_2)'')=\\&(\wp_1\cap\wp_2\cap\mathrm{Simp}(K_2),(C_1\cup C_2)'')=\\&(\wp_1\cap\mathrm{Simp}(K_2),C_1)\wedge(\wp_2\cap\mathrm{Simp}(K_2),C_2)=\\&f((\wp_1,C_1))\wedge f((\wp_2,C_2))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f((\wp_1,C_1)\vee(\wp_2,C_2))&=f((\wp_1\cup\wp_2)'',C_1\cap C_2)=\\&((\wp_1\cup\wp_2)''\cap\mathrm{Simp}(K_2),C_1\cap C_2)=\\&(\wp_1\cap\mathrm{Simp}(K_2),C_1)\vee(\wp_2\cap\mathrm{Simp}(K_2),C_2)=\\&f(\wp_1,C_1)\vee f(\wp_2,C_2)\end{aligned}$$

则,概念格 $L(\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))$ 与 $L(\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K}))$ 同构.

证毕.

例3(续例2)　表4给出了例2中条件属性蕴含背景 $\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$ 的简化背景 $\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K})=(Simp(K_2),K_3,R^{Simp(K_2)})$,其中,

$$Simp(K_2)=\{\varnothing\to m_1,\varnothing\to m_2,m_1\to m_3,m_3\to m_1\}$$

对应的概念格 $L(\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K}))$ 如图2所示.

表4　简化背景 $\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K})$

Table 4　The reduced context $\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K})$

	c_1	c_2	c_3
$\varnothing\to m_1$	0	0	1
$\varnothing\to m_2$	0	1	0
$m_1\to m_3$	1	0	0
$m_3\to m_1$	1	0	1

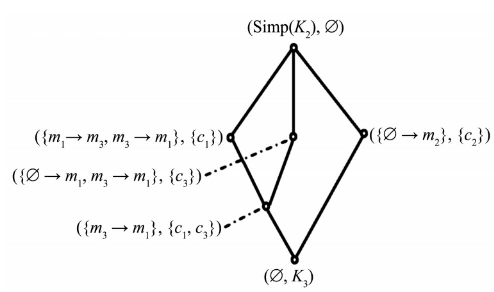

图2　概念格 $L(\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K}))$

Fig. 2　The concept lattice $L(\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K}))$

对比图1和图2可知,概念格 $L(\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))$ 与 $L(\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K}))$ 同构.

3　基于条件属性蕴含的对象定向概念格

在条件属性蕴含背景 $\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$ 上引入必然性算子和可能性算子 $^{\Box},^{\Diamond}:2^{imp(K_2)}\to 2^{K_3}$:

$$\wp^{\Box}:=\{c\in K_3\mid\forall A\to m\in imp(K_2),(A\to m,c)\in R\Rightarrow A\to m\in\wp\}$$

$$\wp^{\Diamond}:=\{c\in K_3\mid\exists A\to m\in imp(K_2),(A\to m,c)\in R\text{且}A\to m\in\wp\}$$

类似地定义另外一对近似算子:

$$^{\Box},^{\Diamond}:2^{K_3}\to 2^{imp(K_2)}$$

$$C^{\Box}:=\{A\to m\in imp(K_2),\mid\forall c\in K_3,(A\to m,c)\in R\Rightarrow c\in C\}$$

$$C^{\Diamond}:=\{A\to m\in imp(K_2),\mid\exists c\in K_3,(A\to m,c)\in R\text{且}c\in C\}$$

定义11　设 $\mathbb{K}=(K_1,K_2,K_3,Y)$ 为三元背景,$\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})=(imp(K_2),K_3,R)$ 为基于 $\mathbb{K}$ 的条件属性蕴含背景,$\forall\wp\subseteq imp(K_2)$,$\forall C\subseteq K_3$. 若二元组 $(\wp,C)$ 满足:$\wp^{\Box}=C$,$C^{\Diamond}=\wp$,则称 $(\wp,C)$ 为条件属性蕴含背景 $\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$ 的对象定向概念,并分别称 $\wp$ 和 C 为该对象定向概念 $(\wp,C)$ 的外延和内涵.

对于任意的两个对象定向概念 $(\wp_1,C_1)$ 和 $(\wp_2,C_2)$ 定义上、下确界:

$$(\wp_1,C_1)\wedge(\wp_2,C_2)=((C_1\cap C_2)^{\Diamond},C_1\cap C_2)$$

$$(\wp_1,C_1)\vee(\wp_2,C_2)=(\wp_1\cup\wp_2,(\wp_1\cup\wp_2)^{\Box})$$

记:

$$L_O(\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))=\{(\wp,C)\mid\wp^{\Box}=C,C^{\Diamond}=\wp\}$$

则 $(L_O(\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})),\wedge,\vee)$ 构成一个完备格,称为条件属性蕴含背景 $\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$ 的对象定向概念格.

例4　计算表3中条件属性蕴含背景 $\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$ 的八个对象定向概念如下:

$$\mathcal{O}_1:=(\{c_1\}^{\Diamond},\{c_1\}^{\Diamond\Box})=(\{m_1\to m_3,m_3\to m_1,\{m_1,m_2\}\to m_3,\{m_2,m_3\}\to m_1\},\{c_1\})$$

$$\mathcal{O}_2:=(\{c_2\}^{\Diamond},\{c_2\}^{\Diamond\Box})=(\{\varnothing\to m_2,m_1\to m_2,m_3\to m_2,\{m_1,m_3\}\to m_2\},\{c_2\})$$

$$\mathcal{O}_3:=(\{c_3\}^{\Diamond},\{c_3\}^{\Diamond\Box})=(\{\varnothing\to m_1,m_2\to m_1,m_3\to m_1,\{m_2,m_3\}\to m_1\},\{c_3\})$$

$$\mathcal{O}_4:=(\{c_1\}^{\Diamond},\{c_1\}^{\Diamond\Box})\vee(\{c_2\}^{\Diamond},\{c_2\}^{\Diamond\Box})=(\{\varnothing\to m_2,m_1\to m_2,m_1\to m_3,m_3\to m_1,m_3\to m_2,\{m_1,m_2\}\to m_3,\{m_1,m_3\}\to m_2,\{m_2,m_3\}\to m_1\},\{c_1,c_2\})$$

$$\mathcal{O}_5:=(\{c_1\}^{\Diamond},\{c_1\}^{\Diamond\Box})\vee(\{c_3\}^{\Diamond},\{c_3\}^{\Diamond\Box})=(\{\varnothing\to m_1,m_1\to m_3,m_2\to m_1,m_3\to m_1,\{m_1,m_2\}\to m_3,\{m_2,m_3\}\to m_1\},\{c_1,c_3\})$$

$$\mathcal{O}_6:=(\{c_2\}^{\Diamond},\{c_2\}^{\Diamond\Box})\vee(\{c_3\}^{\Diamond},\{c_3\}^{\Diamond\Box})=(\{\varnothing\to m_1,\varnothing\to m_2,m_1\to m_2,m_2\to m_1,m_3\to m_1,m_3\to m_2,\{m_1,m_3\}\to m_2,\{m_2,m_3\}\to m_1\},\{c_2,c_3\})$$

$\mathcal{O}_7:=(\{c_1\}^{\diamond},\{c_1\}^{\diamond\Box})\vee(\{c_2\}^{\diamond},\{c_2\}^{\diamond\Box})\vee$
$(\{c_3\}^{\diamond},\{c_3\}^{\diamond\Box})=(imp(K_2),K_3)$

$\mathcal{O}_8:=(\{c_1\}^{\diamond},\{c_1\}^{\diamond\Box})\wedge(\{c_2\}^{\diamond},\{c_2\}^{\diamond\Box})\wedge$
$(\{c_3\}^{\diamond},\{c_3\}^{\diamond\Box})=(\varnothing,\varnothing)$

图3给出了表3条件属性蕴含背景$\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$的对象定向概念格$L_O(\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))$.

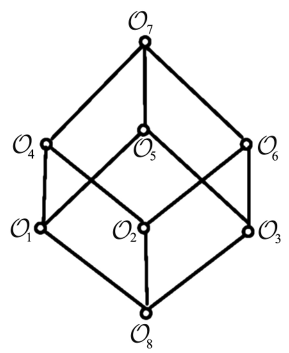

图3 对象定向概念格$L_O(\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))$

Fig. 3 The object oriented concept lattice $L_O(\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))$

定理2 设$\mathbb{K}=(K_1,K_2,K_3,Y)$为三元背景,$\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$为条件属性蕴含背景,$\mathbb{S}\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$为$\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$的简化背景,则对象定向概念格$L_O(\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))$与$L_O(\mathbb{S}\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))$同构.

定理2的证明类似定理1,不再具体证明.

例5(续例4) 计算表4所示简化背景$\mathbb{S}\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$对应的对象定向概念格$L_O(\mathbb{S}\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))$,如图4所示.其中,

$\mathcal{SO}_1:=(\{m_1\to m_3,\ m_3\to m_1\},\{c_1\})$

$\mathcal{SO}_2:=(\{\varnothing\to m_2\},\{c_2\})$

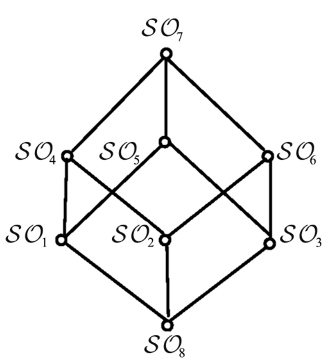

图4 对象定向概念格$L_O(\mathbb{S}\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))$

Fig. 4 The object oriented concept lattice $L_O(\mathbb{S}\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))$

$\mathcal{SO}_3:=(\{\varnothing\to m_1,\ m_3\to m_1\},\{c_3\})$

$\mathcal{SO}_4:=(\{\varnothing\to m_2,\ m_1\to m_3,\ m_3\to m_1\},\{c_1,c_2\})$

$\mathcal{SO}_5:=(\{\varnothing\to m_1,\ m_1\to m_3,\ m_3\to m_1\},\{c_1,c_3\})$

$\mathcal{SO}_6:=(\{\varnothing\to m_1,\varnothing\to m_2,\ m_3\to m_1\},\{c_2,c_3\})$

$\mathcal{SO}_7:=(Simp(K_2),K_3)$

$\mathcal{SO}_8:=(\varnothing,\varnothing)$

对比图3和图4可知,对象定向概念格$L_O(\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))$与$L_O(\mathbb{S}\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))$同构.

4 基于条件属性蕴含的属性定向概念格

定义12 设$\mathbb{K}=(K_1,K_2,K_3,Y)$为三元背景,$\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})=(imp(K_2),K_3,R)$为基于$\mathbb{K}$的条件属性蕴含背景,$\forall\wp\subseteq imp(K_2),\forall C\subseteq K_3$.若二元组$(\wp,C)$满足$\wp^{\diamond}=C,C^{\Box}=\wp$,则称$(\wp,C)$为条件属性蕴含背景$\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$的属性定向概念,并分别称$\wp$和$C$为概念$(\wp,C)$的外延和内涵.

对于任意的两个属性定向概念$(\wp_1,C_1)$和$(\wp_2,C_2)$定义上、下确界:

$(\wp_1,C_1)\wedge(\wp_2,C_2)=(\wp_1\cap\wp_2,(\wp_1\cap\wp_2)^{\diamond})$

$(\wp_1,C_1)\vee(\wp_2,C_2)=((C_1\cup C_2)^{\Box},C_1\cup C_2)$

记$L_P(\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))=\{(\wp,C)|\wp^{\diamond}=C,C^{\Box}=\wp\}$,则$(L_P(\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})),\wedge,\vee)$构成一个完备格,称其为条件属性蕴含背景$\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$的属性定向概念格.

例6 计算表3中条件属性蕴含背景$\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$对应的八个属性定向概念如下:

$\mathcal{P}_1:=(\{c_1\}^{\Box},\{c_1\}^{\Box\diamond})=$
$(\{m_1\to m_3,\ \{m_1,m_2\}\to m_3\},\{c_1\})$

$\mathcal{P}_2:=(\{c_2\}^{\Box},\{c_2\}^{\Box\diamond})=(\{\varnothing\to m_2,$
$m_1\to m_2,\ m_3\to m_2,\ \{m_1,m_3\}\to m_2\},\{c_2\})$

$\mathcal{P}_3:=(\{c_3\}^{\Box},\{c_3\}^{\Box\diamond})=$
$(\{\varnothing\to m_1,\ m_2\to m_1\},\{c_3\})$

$\mathcal{P}_4:=(\{c_1\}^{\Box},\{c_1\}^{\Box\diamond})\vee(\{c_2\}^{\Box},\{c_2\}^{\Box\diamond})=$
$(\{\varnothing\to m_2,m_1\to m_2,m_1\to m_3,m_3\to m_2,$
$m_3\to m_1,\{m_1,m_2\}\to m_3,\{m_1,m_3\}\to m_2,$
$\{m_2,m_3\}\to m_1\},\{c_1,c_2\})$

$\mathcal{P}_5:=(\{c_1\}^{\Box},\{c_1\}^{\Box\Diamond})\vee(\{c_3\}^{\Box},\{c_3\}^{\Box\Diamond})=$
$(\{\varnothing\rightarrow m_1,m_1\rightarrow m_3,m_2\rightarrow m_1,m_3\rightarrow m_1,$
$\{m_1,m_2\}\rightarrow m_3,\{m_2,m_3\}\rightarrow m_1\},\{c_1,c_3\})$

$\mathcal{P}_6:=(\{c_2\}^{\Box},\{c_2\}^{\Box\Diamond})\vee(\{c_3\}^{\Box},\{c_3\}^{\Box\Diamond})=$
$(\{\varnothing\rightarrow m_1,\varnothing\rightarrow m_2,m_1\rightarrow m_2,m_2\rightarrow m_1,$
$m_3\rightarrow m_2,\{m_1,m_3\}\rightarrow m_2\},\{c_2,c_3\})$

$\mathcal{P}_7:=(\{c_1\}^{\Box},\{c_1\}^{\Box\Diamond})\vee(\{c_2\}^{\Box},\{c_2\}^{\Box\Diamond})\vee$
$(\{c_3\}^{\Box},\{c_3\}^{\Box\Diamond})=(imp(K_2),K_3)$

$\mathcal{P}_8:=(\{c_1\}^{\Box},\{c_1\}^{\Box\Diamond})\wedge(\{c_2\}^{\Box},\{c_2\}^{\Box\Diamond})\wedge$
$(\{c_3\}^{\Box},\{c_3\}^{\Box\Diamond})=(\varnothing,\varnothing)$

图5给出了表3条件属性蕴含背景$\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$的属性定向概念格$L_P(\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))$.

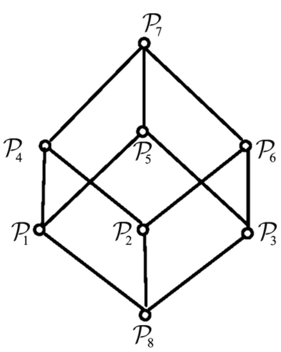

图5　属性定向概念格$L_P(\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))$

Fig. 5　The property oriented concept lattice $L_P(\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))$

同样的,简化背景$\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K})$与原背景$\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$上的属性定向概念格也有如下的关系:

定理3　设$\mathbb{K}=(K_1,K_2,K_3,Y)$为三元背景,$\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$为条件属性蕴含背景,$\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K})$为$\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K})$简化背景,则属性定向概念格$L_P(\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))$与$L_P(\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K}))$同构.

例7(续例6)　考虑表4所示简化背景$\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K})$对应的属性定向概念,计算得:

$\mathcal{SP}_1:=(\{m_1\rightarrow m_3\},\{c_1\})$

$\mathcal{SP}_2:=(\{\varnothing\rightarrow m_2\},\{c_2\})$

$\mathcal{SP}_3:=(\{\varnothing\rightarrow m_1\},\{c_3\})$

$\mathcal{SP}_4:=(\{\varnothing\rightarrow m_2,\ m_1\rightarrow m_3,\ m_3\rightarrow m_1\},\{c_1,c_2\})$

$\mathcal{SP}_5:=(\{\varnothing\rightarrow m_1,\ m_1\rightarrow m_3,\ m_3\rightarrow m_1\},\{c_1,c_3\})$

$\mathcal{SP}_6:=(\{\varnothing\rightarrow m_1,\varnothing\rightarrow m_2\},\{c_2,c_3\})$

$\mathcal{SP}_7:=(Simp(K_2),K_3)$

$\mathcal{SP}_8:=(\varnothing,\varnothing)$

表4简化背景$\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K})$对应的属性定向概念格$L_P(\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K}))$如图6所示.

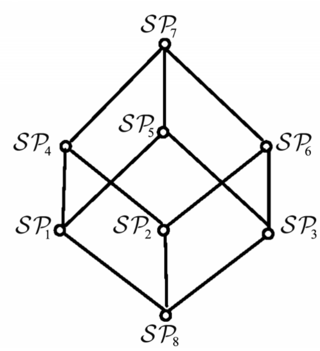

图6　属性定向概念格$L_P(\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K}))$

Fig. 6　The property oriented concept lattice $L_P(\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K}))$

同样的,由图5和图6可知,属性定向概念格$L_P(\mathbb{C}_{imp}(\mathbb{K}))$与$L_P(\mathbb{SC}_{imp}(\mathbb{K}))$同构.

5　总　结

本文利用三元背景的条件属性蕴含构造了条件属性蕴含形式背景,并给出了形式概念的定义.由于实际问题中条件属性蕴含形式背景往往是一个比较大的数据表,因此本文在保持概念格同构的原则下对条件属性蕴含形式背景的对象进行约简.最后,给出了条件属性蕴含形式背景的对象定向概念格和属性定向概念格的定义及对象约简方法.

参考文献

[1]　Lehmann F, Wille R. A triadic approach to formal concept analysis//Ellis G, Levinson R, Rich W, et al. Conceptual Structures: applications, Implementation and Theory. Springer Berlin Heidelberg, 1995:32-43.

[2]　Wille R. The basic theorem of triadic concept analysis. Order, 1995, 12(2):149-158.

[3]　Wille R. Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts//Rival I. NATO

Advanced Study Institute (Ordered Sets). Springer Berlin Heidelberg, 1982: 445－470.

[4] Ganter B, Wille R. Formal concept analysis: mathematical foundations. Springer Berlin Heidelberg, 1999, 17－61.

[5] Wei L, Qian T, Wan Q, et al. A research summary about triadic concept analysis. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2018, 9(4): 699－712.

[6] 魏玲，万青，钱婷等. 三元概念分析综述. 西北大学学报(自然科学版), 2014, 44(5): 689－699. (Wei L, Wan Q, Qian T, et al. An overview of triadic concept analysis. Journal of Northwest University (Natural Science Edition), 2014, 44(5): 689－699.)

[7] Stumme G. Attribute exploration with background implications and exceptions//Bock H H, Polasek W. Data Analysis and Information Systems. Springer Berlin Heidelberg, 1996: 457－469.

[8] Bělohlávek R, Vychodil V. Attribute implications in a fuzzy setting//Missaoui R, Schmid J. Formal Concept Analysis. Springer Berlin Heidelberg, 2006: 45－60.

[9] Vychodil V. On the importance of fuzzy attribute implications//2008 IEEE International Conference on Fuzzy Systems. Hong Kong, China: IEEE, 2008: 281－286.

[10] Vychodil V. On minimal sets of graded attribute implications. Information Sciences, 2015, 294: 478－488.

[11] Zhai Y H, Li D Y, Qu K S. Decision implication canonical basis: a logical perspective. Journal of Computer and System Sciences, 2015, 81(1): 208－218.

[12] Rodríguez-Lorenzo E, Adaricheva K, Cordero P, et al. From an implicational system to its corresponding D-basis//Sadok B Y, Jan K. The 12th International Conference on Concept Lattices and Their Applications. Clermont-Ferrand, France: Blaise Pascal University, 2015: 217－228.

[13] 安秋生，孔祥玉. 函数依赖与属性蕴含的关系研究. 小型微型计算机系统, 2017, 38(9): 2000－2005. (An Q S, Kong X Y. Relationship study of functional dependency and attribute implication. Journal of Chinese Computer Systems, 2017, 38(9): 2000－2005.)

[14] Triska J, Vychodil V. Logic of temporal attribute implications. Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, 2017, 79(4): 307－335.

[15] Vityaev E E, Demin A V, Ponomaryov D K. Probabilistic generalization of formal concepts. Programming and Computer Software, 2012, 38(5): 219－230.

[16] Biedermann K. A foudation of the theory of trilatttices. Ph. D. Dissertation. Aachen: TU Darmstadt, 1998.

[17] Ganter B, Obiedkov S A. Implications in triadic formal contexts//Wolff K E, Pfeiffer H D, Delugach H S. Conceptual Structures. Springer Berlin Heidelberg, 2004: 186－195.

[18] Glodeanu C V. Fuzzy-valued triadic implications//Napoli A, Vychodil V. The 8th International Conference on Concept Lattices and Their Applications. Springer Berlin Heidelberg, 2011: 159－173.

[19] Rodríguez-Lorenzo E, Cordero P, Enciso M, et al. CAISL: simplification logic for conditional attribute implications//Huchard M, Kuznetsov S O. The 13th International Conference on Concept Lattices and Their Applications. Moscow, Russia: National Research University, 2016: 337－348.

[20] Rodríguez-Lorenzo E, Cordero P, Enciso M, et al. An axiomatic system for conditional attribute implications in triadic concept analysis. International Journal of Intelligent Systems, 2017, 32(8): 760－777.

[21] Tang Y Q, Fan M, Li J H. An information fusion technology for triadic decision contexts. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2016, 7(1): 13－24.

[22] 祁建军，魏玲. 三元背景及概念三元格的简化. 计算机科学, 2017, 44(9): 53－57. (Qi J J, Wei L. Simplification of triadic contexts and concept trilattices. Computer Science, 2017, 44(9): 53－57.)

[23] 王霞，张茜，李俊余等. 基于粗糙集的三元概念分析. 山东大学学报(理学版), 2017, 52(7): 37－43. (Wang X, Zhang Q, Li J Y, et al. Triadic concept

analysis based on rough set theory. Journal of Shandong University (Natural Science), 2017, 52 (7):37－43.)

[24] 李俊余,朱荣杰,王霞等. 三元概念与形式概念的关系. 南京大学学报(自然科学),2018,54(4):786－793. (Li J Y,Zhu R J,Wang X,et al. The relationship between triadic concepts and formal concepts. Journal of Nanjing University (Natural Science),2018,54(4):786－793.)

[25] 王霞,江山,李俊余等. 三元概念的一种构造方法. 计算机研究与发展,2019,56(4):544－853. (Wang X,Jiang S,Li J Y,et al. A construction method of triadic concepts. Journal of Computer Research and Development, 2019, 56(4): 544－853.)

[26] Hwang S H. A triadic approach of hierarchical classes analysis on folksonomy mining. International Journal of Computer Science & Network Security,2007,7(8):193－198.

[27] Hwang S H,Kim E H. An approach for mining folksonomies based on the triadic class hierarchies. Advanced Science Letters,2012,9(1):844－849.

[28] 刘晓今. 概念三元格构造算法及应用研究. 博士学位论文. 西安:西安电子科技大学,2013. (Liu X J. Study on the construction algorithem of concept trilattices and its application. Ph. D. Dissertation. Xi'an:Xidian University,2013.)

[29] 王寿彪,李新明,刘东等. 基于大数据的装备体系三元概念认知系统模型构造框架. 系统工程与电子技术,2016,38(11):2537－2545. (Wang S B,Li X M, Liu D, et al. Constructing framework of triadic concepts cognitive system model of equipment system of systems based on big data. Systems Engineering and Electronics, 2016, 38 (11):2537－2545.)

[30] 李贞,张卓,王黎明. 基于三元概念分析的文本分类算法研究. 计算机科学,2017,44(8):207－215. (Li Z, Zhang Z, Wang L M. Research on text classification algorithm based on triadic concept analysis. Computer Science, 2017, 44(8): 207－215.)

[31] 王红敏,张卓,王黎明. 三元概念分析的联盟应用研究. 小型微型计算机系统,2018,39(12):2571－2576. (Wang H M, Zhang Z, Wang L M. Application research on coalition of triadic concept analysis. Journal of Chinese Computer Systems, 2018,39(12):2571－2576.)

[32] Hao F, Park D S, Min G Y, et al. K-Cliques mining in dynamic social networks based on triadic formal concept analysis. Neurocomputing, 2016, 209:57－66.

[33] Kumar C A,Mouliswaran S C,Li J H,et al. Role based access control design using triadic concept analysis. Journal of Central South University, 2016,23(12):3183－3191.

（责任编辑　杨可盛）