第 55 卷　第 4 期
2019 年 7 月

南京大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF NANJING UNIVERSITY
(NATURAL SCIENCE)

Vol. 55, No. 4
July, 2019

DOI:10.13232/j.cnki.jnju.2019.04.003

模糊三支概念分析与模糊三支概念格

龙柄翰[1],徐伟华[2*]

(1.重庆理工大学理学院,重庆,400054;2.西南大学人工智能学院,重庆,400715)

摘　要: 为了进一步将模糊集合理论引入到三支概念分析中,在模糊形式背景下研究了属性导出模糊三支概念与对象导出模糊三支概念,将已有的经典三支概念拓展到了模糊三支概念中,对完善三支概念理论有重要意义.首先,在模糊形式背景下,结合模糊集合理论将对象与属性的关系用隶属度表示.然后,用阈值α以及三支决策思想,将外延(内涵)分为正域,负域,边界域三个部分.其次,提出了两种模糊三支概念(属性导出三支概念与对象导出三支概念)的相关定义和重要定理.最后,结合实例详细解释了模糊三支概念在实际生活中的应用.模糊三支概念分析理论在非经典的背景下为粒计算、人工智能、机器学习等提供了可行的思路.

关键词: 三支决策,三支概念分析,模糊形式背景,模糊集,模糊三支概念分析

中图分类号: TP18,O29　　　　**文献标识码:** A

Fuzzy three-way concept analysis and fuzzy three-way concept lattice

Long Binghan[1], Xu Weihua[2*]

(1. School of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing, 400054, China;
2. College of Artificial Intelligence, Southwest University, Chongqing, 400715, China)

Abstract: The attribute-induced fuzzy three-way concept and object-induced fuzzy three-way concept is studied in order to further introduce the fuzzy sets theory into the three-way concept analysis under the fuzzy form context. This paper extends the classical three-way concept to the fuzzy three-way concept, which is of great significance to improve the three-way concept theory. Firstly, the relationship between object and attribute is expressed by membership degree combined with the fuzzy sets theory under the fuzzy form context. Then we use threshold α and three-way decisions to divide the extension (intension) into three parts: positive domain, negative domain and boundary domain. Next, we proposed the relevant definitions and important theorems of two kinds of fuzzy three-way concepts(the attribute induced fuzzy three-way concept and the object induced fuzzy three-way concept). Finally, this paper explains in detail the application of fuzzy three-way concept in real life with examples. Fuzzy three-way concept analysis theory provides feasible ideas for granular computing, artificial intelligence, machine learning and so on under the fuzzy context.

Key words: three-way decisions, three-way concept analysis, fuzzy form context, fuzzy sets theory, fuzzy three-way concept analysis

三支决策(Three-way Decision)是一种基于符合人类认知的决策模式,是二支决策的一种扩展[1-2].人们在面对问题时,除了接受和拒绝,还有第三个选择(延迟决策),即,在作出决

基金项目:国家自然科学基金(61472463,61772002),西南大学中央高校基本科研业务专项(XDJK2019B029)

收稿日期:2019－05－17

*通讯联系人,E-mail:chxuwh@gmail.com

策的时候,决策者对有充分把握接受或者拒绝的情况可以作出快速准确的判断,而对于不能准确判断的情况,则通常会推迟决策的时间.可见,三支决策是人类解决问题时的一种常见方法,在日常生活中应用广泛.三支决策的基本思想则是通过给定的标准将一个集合分成三个不相交的子集,这三个不相交的子集分别称为正域、负域和边界域.从正域中可以得到接受规则,从负域中可以得到拒绝规则,从边界域中可以得到不承诺规则.近年来,这一新的理论得到了越来越多的关注,并在计算机科学、信息科学、管理科学、工程科学、社会科学、医疗决策等诸多领域和学科中得到了广泛应用[3-5].

形式概念分析是一种基于形式背景(Formal Context)进行数据处理和知识表示的数学工具,是 Ganter and Wille[6]在 1982 年提出的一种表示形式概念(Formal concept)的模型,被广泛应用于数据挖掘、信息检索、机器学习、人工智能等领域[7-9].然而,在形式概念分析中通常只能得到二支决策,而非三支决策,即,对于每一个形式概念,只能确定一个对象是否拥有内涵中的所有元素或者一个属性是否被外延中的所有元素共享[10].实际上,对于一个形式背景的补背景也能得到一个对象是否不拥有任何内涵中的任意元素或者一个属性不被外延中任何对象具有等信息,但是这些信息并没有反应在形式概念中[11].Qi et al[12]将三支决策理论应用到形式概念分析中,提出了三支概念分析理论.三支概念分析的两个关键组成部分是三支概念与三支概念格.由三支决策思想可知,正域、负域、边界域为全集的一个划分,因此三支决策只需要刻画正域和负域两部分.属性导出三支概念的外延由正域和负域两部分组成,这两部分在形式背景中表示内涵中的属性被对象“共同拥有”和“共同不拥有”.对象导出三支概念的内涵也由正域和负域两部分组成,这两部分在形式背景中表示对象“共同拥有”和“共同不拥有”内涵中的属性[13-15].

Zadeh[16]在 1975 年创立了一种描述模糊现象的方法:模糊集合论.与经典集合不同,模糊集合论将待考察的对象及反映它的模糊概念作为一个模糊集合,通过建立适当的隶属函数并对模糊集合定义有关变换和运算来对模糊对象进行分析.在实际应用中,对象与属性之间的关系是模糊的,经典的三支形式概念分析并不能表达模糊的信息.为了解决这个问题,将模糊集合理论与三支概念分析相结合是一条可行的思路.到目前为止,模糊三支概念分析还没有系统的研究,但很多学者将模糊理论与形式概念分析相结合,提出了模糊形式概念分析,为建立发展模糊三支概念分析提供了充分的理论基础.Burusco and Fuentes-González[17]提出了 L-模糊形式背景(L-fuzzy Context),用高、中、低这样的语言术语表示不确定性.但是这种定义方法没有固定的标准,并且在对象集合较大时产生的概念格会引起组合爆炸.胡明涵等[18]将不确定信息直接用隶属度表示,这样由模糊形式概念分析产生的模糊概念格就更简单,并且能支持概念间相似度的计算.刘宗田等[19]提出了模糊形式背景中属性隶属度值的窗口截取方法,定义了模糊概念的模糊参数 σ 和 λ,给出了模糊概念格渐进式构造算法,并推导出了模糊参数 σ 和 λ 的渐进式计算公式.

本文首先在预备知识中介绍了形式概念分析、三支概念分析和模糊集合理论的相关知识,然后提出模糊正算子、模糊负算子的定义并通过两个算子得到模糊三支算子.其次提出模糊三支算子的相关定理,而后由模糊三支算子定义了两种模糊三支概念,进而得到属性导出模糊三支概念格和对象导出模糊三支概念格并证明了模糊三支概念格为完备格,并给出一个例子来解释模糊三支概念在生活中的应用.

1 预备知识

1.1 形式概念分析基本理论

定义 1[20] 设 $F=(G,M,I)$ 为一个形式背景,其中 $G=\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\}$ 为对象集,$M=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$ 为属性集,I 为 G 与 M 之间的

二元关系为$I\subseteq G\times M$. 若$x\in G,a\in M$,记xIa或$(x,a)\in I$当且仅当对象x具有属性a或者属性a被对象x拥有.

对于形式背景$F=(G,M,I)$, $X\subseteq G$, $A\subseteq M$,Ganter and Wille[20]定义如下"*"算子:

$$X^{*}=\{a|a\in M,\forall x\in X,(x,a)\in I\}\tag{1}$$

$$A^{*}=\{x|x\in G,\forall a\in A,(x,a)\in I\}\tag{2}$$

文献[20]详细解释了这对算子的相关性质,本文不再赘述.

定义2[20]　设$F=(G,M,I)$为一个形式背景,$X\subseteq G,A\subseteq M$. 若$X^{*}=A$且$A^{*}=X$,则称$(X,A)$为一形式概念. 其中,$X$和$A$分别为形式概念$(X,A)$的外延与内涵.

定理1　若$F=(G,M,I)$为一个形式背景. 记:

$$FL(G,M,I)=\{(X,A)|X=A^{*},A=X^{*}\}$$

定义偏序关系$\leqslant$为:

$$(X_1,A_1)\leqslant(X_2,A_2)\Leftrightarrow X_1\subseteq X_2(\Leftrightarrow A_1\supseteq A_2)$$

则$(FL(G,M,I),\leqslant)$为一个完备格,称为形式背景$F=(G,M,I)$上的概念格. 它们的下确界和上确界分别为:

$$(X_1,A_1)\wedge(X_2,A_2)=(X_1\cap X_2,(A_1\cup A_2)^{**})\tag{3}$$

$$(X_1,A_1)\vee(X_2,A_2)=((X_1\cup X_2)^{**},A_1\cap A_2)\tag{4}$$

1.2　三支概念分析　Qi et al[12]将三支决策的思想应用到了形式概念分析中,构建出三支概念分析.

定义3[12]　设$F=(G,M,I)$为一个形式背景,$X\subseteq G,A\subseteq M$. 若:

$$X^{\bar{*}}=\{a|a\in M,\forall x\in X,(x,a)\notin I\}\tag{5}$$

$$A^{\bar{*}}=\{x|x\in G,\forall a\in A,(x,a)\notin I\}\tag{6}$$

定义1中的"*"称为正算子,"$\bar{*}$"称为负算子. 结合正算子*与负算子$\bar{*}$,定义在X与A上的一对三支算子$\lessdot$:

$$X^{\lessdot}=(X^{*},X^{\bar{*}}),A^{\lessdot}=(A^{*},A^{\bar{*}})\tag{7}$$

对于以上三支算子,可以逆定义算子$\gtrdot$为

$$(X,Y)^{\gtrdot}=\{a\in M|a\in X^{*},a\in Y^{\bar{*}}\}\tag{8}$$

$$(A,B)^{\gtrdot}=\{x\in G|x\in A^{*},x\in B^{\bar{*}}\}\tag{9}$$

定义4[12]　设$F=(G,M,I)$为一个形式背景,$X,Y\subseteq G,A\subseteq M$. 如果$A^{\lessdot}=(X,Y)$且$(X,Y)^{\gtrdot}=A$,则称$((X,Y),A)$为属性导出三支概念,简称$AE$-概念(Attribute Induce Three-way Concept). 其中,(X,Y)叫作AE-概念的外延,A叫作AE-概念的内涵.

将由形式背景$F=(G,M,I)$生成的所有AE-概念的集合用$AEL(G,M,I)$表示. 对于:

$$((X,Y),A),((W,Z),B)\in AEL(G,M,I)$$

定义其偏序关系如下:

$$((X,Y),A)\leqslant((W,Z),B)\Leftrightarrow$$
$$(X,Y)\subseteq(W,Z)\Leftrightarrow B\subseteq A\tag{10}$$

其中,$((X,Y),A)$叫作$((W,Z),B)$的亚概念,$((W,Z),B)$叫作$((X,Y),A)$的超概念. $AEL(G,M,I)$在如下定义的偏序关系$\leqslant$下是一个完备格,称之为AE-概念格. 其中,上确界和下确界分别为:

$$((X,Y),A)\vee((W,Z),B)=$$
$$(((X,Y)\cup(W,Z))^{\gtrdot\lessdot},A\cap B)\tag{11}$$

$$((X,Y),A)\wedge((W,Z),B)=$$
$$((X,Y)\cap(W,Z),(A\cup B)^{\lessdot\gtrdot})\tag{12}$$

相似的,对象导出三支概念(OE-概念)被定义.

定义5[12]　设$F=(G,M,I)$为一个形式背景,$A,B\subseteq M,X\subseteq G$. 如果$X^{\lessdot}=(A,B)$且$(A,B)^{\gtrdot}=X$,则称$(X,(A,B))$为对象导出三支概念,简称$OE$-概念(Object Induce Three-way Concept). 其中X叫作OE-概念的外延,(A,B)叫作OE-概念的内涵.

将由形式背景$F=(G,M,I)$生成的所有OE-概念的集合用$AEL(G,M,I)$表示. 对于:

$$(X,(A,B)),(Y,(C,D))\in AEL(G,M,I)$$

定义其偏序关系如下:

$$(X,(A,B))\leqslant(Y,(C,D))\Leftrightarrow$$
$$X\subseteq Y\Leftrightarrow(C,D)\subseteq(A,B)\tag{13}$$

其中,$(X,(A,B))$叫作$(Y,(C,D))$的亚概念,而$(Y,(C,D))$则叫作$(X,(A,B))$的超概念. $OEL(G,M,I)$在如下定义的偏序关系$\leqslant$下是一个完备格,称之为OE-概念格. 上确界和下确界分别为:

$$(X,(A,B))\vee(Y,(C,D))=$$
$$((X\cup Y)^{\lessdot\gtrdot},(A,B)\cap(C,D)) \tag{14}$$
$$(X,(A,B))\wedge(Y,(C,D))=$$
$$((X\cap Y),((A,B)\cup(C,D))^{\gtrdot\lessdot}) \tag{15}$$

容易看出,对象导出三支概念(OE-概念)与属性导出三支概念(AE-概念)为对偶概念.

1.3 模糊集合基本理论 Zadeh[16]在 1975 年提出了模糊集合论用来描述模糊现象,本节主要介绍模糊集合理论的基本定义与相关性质.

定义 6[16] 给定一个论域 U,μ_A 为 U 到 $[0,1]$ 的一个映射 $U\rightarrow[0,1]$,则 μ_A 称为 U 上的一个模糊集,或 U 的一个模糊子集.模糊集也可以记为 A,映射函数 $\mu_A(*)$ 或 $A(*)$ 为模糊集 A 的隶属度函数.对于 $\forall x\in U$,$\mu_A(x)$ 或 $A(x)$ 称为对象 x 关于模糊集 A 的隶属度.

定义 7[16] Zadeh 模糊集合的并集、交集和补集运算的隶属度分别被定义为:

$$(A\cup B)(x)=A(x)\vee B(x)=$$
$$\max(A(x),B(x)) \tag{16}$$
$$(A\cap B)(x)=A(x)\wedge B(x)=$$
$$\min(A(x),B(x)) \tag{17}$$
$$A^c(x)=1-A(x) \tag{18}$$

2 模糊三支概念分析与模糊三支概念格

将 Zadeh[16]的模糊集合理论与三支形式概念分析相结合即可形成模糊三支形式概念分析,进而构造模糊三支概念格.

定义 8 模糊形式背景 设 $\tilde{F}=(G,M,\tilde{I})$ 为一个模糊形式背景.其中,G 为所有对象的集合,M 为所有属性的集合,$\tilde{I}$ 为一个在域 $G\times M$ 上定义的模糊集.对于 $\forall(x,a)\in G\times M$ 有 $0\leqslant\mu(x,a)\leqslant 1$.

定义 9 给定一个模糊形式背景 $\tilde{F}=(G,M,\tilde{I})$ 以及一个阈值 α,$X\subseteq G$,$A\subseteq M$.$\varphi(X)$ 和 $\varphi(A)$ 为 X 与 A 上的模糊集.定义模糊正算子 $\tilde{*}$ 为:

$$X^{\tilde{*}}=\{(a,\mu(X,a))|a\in M,\forall x\in X,$$
$$\mu(x,a)\geqslant\alpha\} \tag{19}$$
$$\varphi(X)^{\tilde{*}}=\{a|a\in M,\forall x\in X,\mu(x,a)\geqslant\alpha\} \tag{20}$$
$$A^{\tilde{*}}=\{(x,\mu(X,a))|x\in G,\forall a\in A,$$
$$\mu(x,a)\geqslant\alpha\} \tag{21}$$
$$\varphi(A)^{\tilde{*}}=\{x|x\in G,\forall a\in A,\mu(x,a)\geqslant\alpha\} \tag{22}$$

模糊负算子为:

$$X^{\bar{\tilde{*}}}=\{(a,\mu(X,a))|a\in M,\forall x\in X,$$
$$\mu(x,a)<\alpha\} \tag{23}$$
$$\varphi(X)^{\bar{\tilde{*}}}=\{a|a\in M,\forall x\in X,\mu(x,a)<\alpha\} \tag{24}$$
$$A^{\bar{\tilde{*}}}=\{(x,\mu(X,a))|x\in G,\forall a\in A,$$
$$\mu(x,a)<\alpha\} \tag{25}$$
$$\varphi(A)^{\bar{\tilde{*}}}=\{x|x\in G,\forall a\in A,\mu(x,a)<\alpha\} \tag{26}$$

结合正算子 $\tilde{*}$ 与负算子 $\bar{\tilde{*}}$,定义在 X 与 A 上的一对模糊三支算子 $\lessdot$:

$$X^{\lessdot}=(X^{\tilde{*}},X^{\bar{\tilde{*}}}),A^{\lessdot}=(A^{\tilde{*}},A^{\bar{\tilde{*}}}) \tag{27}$$

对于以上三支算子,可以逆定义算子 $\gtrdot$ 为:

$$(\varphi(X),\varphi(Y))^{\gtrdot}=$$
$$\{a\in M|a\in\varphi(X)^{\tilde{*}},a\in\varphi(Y)^{\bar{\tilde{*}}}\} \tag{28}$$
$$(\varphi(A),\varphi(B))^{\gtrdot}=$$
$$\{x\in G|x\in\varphi(A)^{\tilde{*}},x\in\varphi(B)^{\bar{\tilde{*}}}\} \tag{29}$$

定义 10 给定一个模糊形式背景 $\tilde{F}=(G,M,\tilde{I})$ 和一个阈值 α,$X,Y\subseteq G$,$A\subseteq M$.记:

$$\varphi(X)=\{(x_1,\mu_A(x_1)),(x_2,\mu_A(x_2)),$$
$$(x_3,\mu_A(x_3)),\cdots,(x_n,\mu_A(x_n))\},x_i\in X$$

其中,

$$\mu_A(x)=\mu_{a_1}(x)\cap\mu_{a_2}(x)\cap\cdots\cap\mu_{a_n}(x)$$

若:

$$A^{\lessdot}=(\varphi(X),\varphi(Y))$$

且:

$$(\varphi(X),\varphi(Y))^{\gtrdot}=A$$

则称 $((\varphi(X),\varphi(Y)),A)$ 为属性导出模糊三支概念,简称模糊 AE-概念.其中 $(\varphi(X),\varphi(Y))$ 叫作模糊 AE-概念的外延,A 叫作模糊 AE-概念的内涵.

定理 2 给定一个模糊形式背景 $\tilde{F}=(G,M,\tilde{I})$ 以及一个阈值 α,$A,A_1,A_2\subseteq M$ 为属

性子集,$X,X_1,X_2\subseteq G$为对象子集,则下列结论成立:

(1)$A_1\subseteq A_2\Rightarrow A_2^{\lessdot}\subseteq A_1^{\lessdot}$;

(2)$X_1\subseteq X_2\Rightarrow X_2^{\lessdot}\subseteq X_1^{\lessdot}$;

(3)$A\subseteq A^{\lessdot\gtrdot},X\subseteq X^{\lessdot\gtrdot}$;

(4)$A^{\lessdot}=A^{\lessdot\gtrdot\lessdot},X^{\lessdot}=X^{\lessdot\gtrdot\lessdot}$;

(5)$(\bigcup_{i\in I}A_i)^{\lessdot}=\bigcap_{i\in I}A_i^{\lessdot},(\bigcup_{i\in I}X_i)^{\lessdot}=\bigcap_{i\in I}X_i^{\lessdot}$,其中,$I$是指标集合的任一子集.

证　明　仅证明结论(1)和结论(5),其余类似.

结论(1):令$A_2^{\lessdot}=(A_2^{\tilde{*}},A_2^{\tilde{\tilde{*}}})$,设任意$x_1\in A_2^{\tilde{*}},x_2\in A_2^{\tilde{\tilde{*}}}$.对任意$a\in A_2$,有$\mu(x_1,a)\geqslant\alpha$,$\mu(x_2,a)<\alpha$.因为$A_1\subseteq A_2$,所以对任意$b\in A_1$,均有$\mu(x_1,b)\geqslant\alpha$,$\mu(x_2,b)<\alpha$,即$x_1\in A_1^{\tilde{*}},x_2\in A_1^{\tilde{\tilde{*}}}$.

结论(5):令

$$(\bigcup_{i\in I}A_i)^{\lessdot}=((\bigcup_{i\in I}A_i)^{\tilde{*}},(\bigcup_{i\in I}A_i)^{\tilde{\tilde{*}}})$$

$$\bigcap_{i\in I}A_i^{\lessdot}=\bigcap_{i\in I}(A_i^{\tilde{*}},A_i^{\tilde{\tilde{*}}})=(\bigcap_{i\in I}A_i^{\tilde{*}},\bigcap_{i\in I}A_i^{\tilde{\tilde{*}}})$$

要证:

$$(\bigcup_{i\in I}A_i)^{\lessdot}=\bigcap_{i\in I}A_i^{\lessdot}$$

只需证:

$$(\bigcup_{i\in I}A_i)^{\tilde{*}}=\bigcap_{i\in I}A_i^{\tilde{*}};(\bigcup_{i\in I}A_i)^{\tilde{\tilde{*}}}=\bigcap_{i\in I}A_i^{\tilde{\tilde{*}}}$$

任取$x_1\in(\bigcup_{i\in I}A_i)^{\tilde{*}}$,$x_2\in(\bigcup_{i\in I}A_i)^{\tilde{\tilde{*}}}$,则对任意$a\in\bigcup_{i\in I}A_i$,均有$\mu(x_1,a)\geqslant\alpha,\mu(x_2,a)<\alpha$.因为对任意$k\in I$,均有$A_k\subseteq\bigcup_{i\in I}A_i$,由结论(1)可知$(\bigcup_{i\in I}A_i)^{\lessdot}\subseteq A_k^{\lessdot}$,所以$x_1\in A_k^{\tilde{*}},x_2\in A_k^{\tilde{\tilde{*}}}$.由$k$的任意性可知$x_1\in\bigcap_{i\in I}A_i^{\tilde{*}},x_2\in\bigcap_{i\in I}A_i^{\tilde{\tilde{*}}}$.因此,$(\bigcup_{i\in I}A_i)^{\tilde{*}}\subseteq\bigcap_{i\in I}A_i^{\tilde{*}}$;$(\bigcup_{i\in I}A_i)^{\tilde{\tilde{*}}}\subseteq\bigcap_{i\in I}A_i^{\tilde{\tilde{*}}}$.即$(\bigcup_{i\in I}A_i)^{\lessdot}\subseteq\bigcap_{i\in I}A_i^{\lessdot}$.反之,若$x_1\in\bigcap_{i\in I}A_i^{\tilde{*}}$,$x_2\in\bigcap_{i\in I}A_i^{\tilde{\tilde{*}}}$,则对任意$k\in I$,均有$x_1\in A_k^{\tilde{*}}$,$x_2\in A_k^{\tilde{\tilde{*}}}$.对任意$a\in A_k$,有$\mu(x_1,a)\geqslant\alpha$,$\mu(x_2,a)<\alpha$.由$k$的任意性可知,任意$a\in\bigcup_{i\in I}A_i$,均有$\mu(x_1,a)\geqslant\alpha,\mu(x_2,a)<\alpha$.因此,$x_1\in(\bigcup_{i\in I}A_i)^{\tilde{*}},x_2\in(\bigcup_{i\in I}A_i)^{\tilde{\tilde{*}}}$.

综上,$(\bigcup_{i\in I}A_i)^{\lessdot}=\bigcap_{i\in I}A_i^{\lessdot}$成立.

同理,可证$(\bigcup_{i\in I}X_i)^{\lessdot}=\bigcap_{i\in I}X_i^{\lessdot}$.

定义11　设$\tilde{F}=(G,M,\tilde{I})$为模糊形式背景.$AEFL(G,M,I)$表示由模糊形式背景$\tilde{F}=(G,M,\tilde{I})$生成的所有模糊$AE$-概念的集合.对任意

$$((\varphi(X),\varphi(Y)),A),((\varphi(W),\varphi(Z)),B)\in AEFL(G,M,I)$$

定义其偏序关系如下:

$$((\varphi(X),\varphi(Y)),A)\leqslant((\varphi(W),\varphi(Z)),B)\Leftrightarrow(\varphi(X),\varphi(Y))\subseteq(\varphi(W),\varphi(Z))\Leftrightarrow B\subseteq A$$

其中,$((\varphi(X),\varphi(Y)),A)$叫作$((\varphi(W),\varphi(Z)),B)$的亚概念,$((\varphi(W),\varphi(Z)),B)$叫作$((\varphi(X),\varphi(Y)),A)$的超概念.

定理3　设$\tilde{F}=(G,M,\tilde{I})$为模糊形式背景,$AEFL(G,M,I)$为所有模糊$AE$-概念的集合.则$AEFL(G,M,I)$在偏序关系$\leqslant$下是一个完备格,称之为模糊$AE$-概念格.对任意

$$((\varphi(X),\varphi(Y)),A),((\varphi(W),\varphi(Z)),B)\in AEFL(G,M,I)$$

其下确界和上确界分别为:

$$((\varphi(X),\varphi(Y)),A)\wedge((\varphi(W),\varphi(Z)),B)=((\varphi(X),\varphi(Y))\cap(\varphi(W),\varphi(Z)),(A\cup B)^{\lessdot\gtrdot})$$

$$((\varphi(X),\varphi(Y)),A)\vee((\varphi(W),\varphi(Z)),B)=(((\varphi(X),\varphi(Y))\cup(\varphi(W),\varphi(Z)))^{\gtrdot\lessdot},A\cap B)$$

证　明　首先证明下确界.

$$(A\cup B)^{\lessdot\gtrdot}=(A^{\lessdot}\cap B^{\lessdot})^{\gtrdot}=(\varphi(X),\varphi(Y))\cap(\varphi(W),\varphi(Z))^{\gtrdot}=(\varphi(X)\cap\varphi(W),\varphi(Y)\cap\varphi(Z))^{\gtrdot}=(\varphi(X\cap W),\varphi(Y\cap Z))^{\gtrdot}$$

对任意$x\in X\cap W,y\in Y\cap Z$,有:

$$\mu_{(A\cup B)^{\lessdot\gtrdot}}(x)=\min_{a\in((A\cup B)^{\lessdot\gtrdot})}\mu(x,a)$$

$$\mu_{(A\cup B)^{\lessdot\gtrdot}}(y)=\min_{a\in((A\cup B)^{\lessdot\gtrdot})}\mu(y,a)$$

所以，

$$((\varphi(X),\varphi(Y))\cap(\varphi(W),\varphi(Z)),(A\cup B)^{\lessdot\gtrdot})$$

为一个模糊概念．因为：

$$(X,Y)\cap(W,Z)\subseteq(X,Y)$$

且：

$$(X,Y)\cap(W,Z)\subseteq(W,Z)$$

所以：

$$((\varphi(X),\varphi(Y))\cap(\varphi(W),\varphi(Z)),(A\cup B)^{\lessdot\gtrdot})\leqslant((\varphi(X),\varphi(Y)),A)$$

又由于：

$$((\varphi(X),\varphi(Y))\cap(\varphi(W),\varphi(Z)),(A\cup B)^{\lessdot\gtrdot})\leqslant((\varphi(W),\varphi(Z)),B)$$

所以，

$$((\varphi(X),\varphi(Y))\cap(\varphi(W),\varphi(Z)),(A\cup B)^{\lessdot\gtrdot})$$

是下界．

对任意下界 $((\varphi(X'),\varphi(Y')),A')$，有 $X'\subseteq X,Y'\subseteq Y$ 且 $X'\subseteq W,Y'\subseteq Z$，即：

$$((\varphi(X'),\varphi(Y')),A')\leqslant((\varphi(X),\varphi(Y))\cap(\varphi(W),\varphi(Z)),(A\cup B)^{\lessdot\gtrdot})$$

综上，$((\varphi(X),\varphi(Y))\cap(\varphi(W),\varphi(Z)),(A\cup B)^{\lessdot\gtrdot}$ 为下确界．

同理，可证上确界成立．

定义12 给定一个模糊形式背景 $\tilde{F}=(G,M,\tilde{I})$ 及一个阈值 $\alpha,X\subseteq G,A,B\subseteq M$. 记：

$$\varphi(A)=\{(a_1,\mu_{a_1}(X)),(a_2,\mu_a(X)),(a_3,\mu_a(X)),\cdots,(a_n,\mu_a(X))\},a_i\in X$$

其中，

$$\mu_a(\mathrm{X})=\mu_a(x_1)\cap\mu_a(x_2)\cap\cdots\cap\mu_a(x_n)$$

若：

$$X^{\lessdot}=(\varphi(A),\varphi(B))$$

且：

$$(\varphi(A),\varphi(B))^{\gtrdot}=X$$

则称 $(X,(\varphi(A),\varphi(B)))$ 为对象导出模糊三支概念，简称模糊 OE-概念．其中，X 叫作模糊 OE-概念的外延，$(\varphi(A),\varphi(B))$ 叫作模糊 OE-概念的内涵．

定义13 设 $\tilde{F}=(G,M,\tilde{I})$ 为模糊形式背景，$OEFL(G,M,\tilde{I})$ 表示由形式背景 $\tilde{F}=(G,M,\tilde{I})$ 生成的所有模糊 OE-概念的集合．对任意

$$((X,(\varphi(A),\varphi(B))),(Y,(\varphi(C),\varphi(D))))\in OEFL(G,M,\tilde{I})$$

定义其偏序关系如下：

$$(X,(\varphi(A),\varphi(B)))\leqslant(Y,(\varphi(C),\varphi(D)))\Leftrightarrow X\subseteq Y\Leftrightarrow(\varphi(C),\varphi(D))\subseteq(\varphi(A),\varphi(B))$$

其中，$(X,(\varphi(A),\varphi(B)))$ 叫作 $(Y,(\varphi(C),\varphi(D)))$ 的亚概念，$(Y,(\varphi(C),\varphi(D)))$ 叫作 $(X,(\varphi(A),\varphi(B)))$ 的超概念．

定理4 设 $\tilde{F}=(G,M,\tilde{I})$ 为模糊形式背景，$OEFL(G,M,\tilde{I})$ 表示由模糊形式背景 $\tilde{F}=(G,M,\tilde{I})$ 生成的所有模糊 OE-概念的集合．则 $OEFL(G,M,I)$ 在偏序关系 $\leqslant$ 下是一个完备格，称之为模糊 OE-概念格．对任意

$$((X,(\varphi(A),\varphi(B)))\vee(Y,(\varphi(C),\varphi(D)))\in OEFL(G,M,\tilde{I})$$

其下确界和上确界分别为：

$$(X,(\varphi(A),\varphi(B)))\wedge(Y,(\varphi(C),\varphi(D)))=(X\cap Y,((\varphi(A),\varphi(B))\cup(\varphi(C),\varphi(D)))^{\gtrdot\lessdot})$$

$$(X,(\varphi(A),\varphi(B)))\vee(Y,(\varphi(C),\varphi(D)))=((X\cup Y)^{\lessdot\gtrdot},(\varphi(A),\varphi(B))\cap(\varphi(C),\varphi(D)))$$

证明 与定理2类似，不再详细证明．

例1 $\tilde{F}=(G,M,\tilde{I})$ 为一个模糊形式背景，如表1所示．$G=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ 为对象集，表示五只小球．$M=\{a,b,c\}$ 表示小球的三个特征集，分别为大的，红色，光滑．

取阈值 $\alpha=0.6$，由表1可得属性导出模糊三支概念(模糊 AE-概念)的外延与内涵(表2)．取阈值 $\alpha=0.6$，由表1可得对象导出模糊三支概念(模糊 OE-概念)的外延与内涵，如表3所示．

表1 模糊形式背景

Table 1 A fuzzy context

	a	b	c
x_1	0.76	0.82	0.43
x_2	0.31	0.69	0.38
x_3	0.27	0.31	0.76
x_4	0.46	0.95	0.79
x_5	0.97	0.03	0.18

表2　属性导出模糊三支概念(模糊AE-概念)的外延与内涵

Table 2　The extension and connotation of fuzzy three-way concept (fuzzy AE-concept) induced by attributes

	外延	内涵
AE_1	(G,G)	ϕ
AE_2	$((\{x_1,0.76\},\{x_5,0.97\}),(\{x_2,0.31\},\{x_3,0.27\},\{x_4,0.46\}))$	a
AE_3	$((\{x_1,0.82\},\{x_2,0.69\},\{x_4,0.95\}),(\{x_3,0.31\},\{x_5,0.03\}))$	b
AE_4	$((\{x_3,0.76\},\{x_4,0.79\}),(\{x_1,0.43\},\{x_2,0.38\},\{x_5,0.18\}))$	c
AE_5	$((\{x_1,0.76\}),(\{x_3,0.27\}))$	$\{a,b\}$
AE_6	$((\{x_4,0.79\}),(\{x_5,0.03\}))$	$\{b,c\}$
AE_7	$(\phi,(\{x_2,0.31\}))$	$\{a,c\}$
AE_8	(ϕ,ϕ)	M

表3　对象导出模糊三支概念(模糊OE-概念)的外延与内涵

Table 3　The extension and connotation of fuzzy three-way concept (fuzzy OE-concept) induced by objects

	内涵	外延
OE_1	(M,M)	ϕ
OE_2	$((\{a,0.76\},\{b,0.82\}),(\{c,0.43\}))$	x_1
OE_3	$((\{b,0.69\}),(\{a,0.31\},\{c,0.38\}))$	x_2
OE_4	$((\{c,0.76\}),(\{a,0.27\},\{b,0.31\}))$	x_3
OE_5	$((\{b,0.95\},\{c,0.79\}),(\{a,0.46\}))$	x_4
OE_6	$((\{a,0.97\},\{b,0.03\}),(\{c,0.18\}))$	x_5
OE_7	$((\{b,0.69\}),(\{c,0.38\}))$	$\{x_1,x_2\}$
OE_8	$((\{a,0.76\}),(\{c,0.18\}))$	$\{x_1,x_5\}$
OE_9	$((\{b,0.69\}),(\{a,0.31\}))$	$\{x_2,x_4\}$
OE_{10}	$((\{c,0.76\}),(\{a,0.27\}))$	$\{x_3,x_4\}$
OE_{11}	$(\phi,(\{b,0.03\}))$	$\{x_3,x_5\}$
OE_{12}	$((\{b,0.69\}),\phi)$	$\{x_1,x_2,x_4\}$
OE_{13}	$(\phi,(\{c,0.18\}))$	$\{x_1,x_2,x_5\}$
OE_{14}	$(\phi,(\{a,0.27\}))$	$\{x_2,x_3,x_4\}$
OE_{15}	(ϕ,ϕ)	G

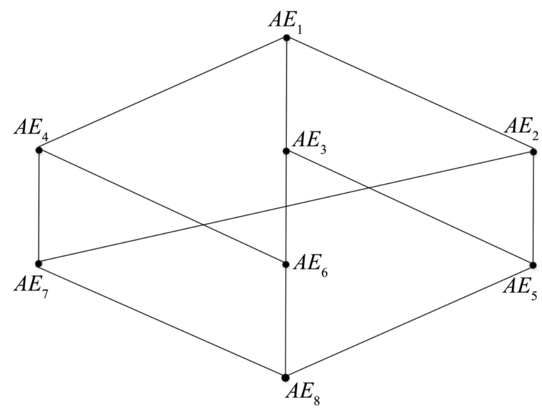

图1　模糊AE-概念格

Fig. 1　The fuzzy AE-concept lattice

由全部属性导出模糊三支概念(模糊AE-概念)得到的模糊AE-概念格如图1所示,由全部对象导出模糊三支概念(模糊OE-概念)得到的模糊OE-概念格如图2所示.

通过例1可以直观地了解模糊三支概念的具体表现形式并清晰地展示模糊三支概念的构造原理.表1是需要构造模糊三支概念的模糊形式背景.每个小球与它的特征都不是经典的$\{1,0\}$(属于与不属于)关系,而是由隶属度表示的.从表2和图1可以看出,每个概念的外延中的元素都是由对象集和它的隶属度表示的;从表3和图2可以看出,每个概念的内涵中的元素都是由属性集和它的隶属度表示的.模糊三支概念将三支决策理论、形式概念分析和模糊集合巧妙地集合在一起,将外延中的元素分为正域、负域、边界域并将概念用模糊集合表示.例如,从表2的AE_5中可以看出,x_1关于$\{a,b\}$隶属度为0.76,大于阈值0.6,因此可以认为x_1在相当大的程度上同时具有属性a,b,即小球1又大又红.同样的,x_3关于$\{a,b\}$的隶属度为0.27,小于阈值0.6,因此可以认为x_3基本同时不具有属性a,b,即小球3既不大也不红.

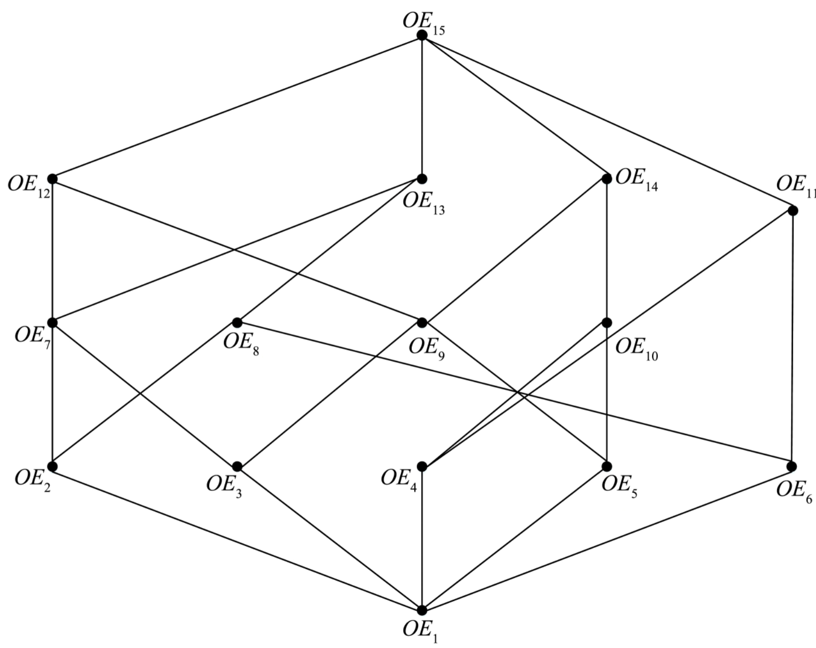

图 2 模糊 OE-概念格

Fig. 2 The fuzzy OE-concept lattice

3 结束语

模糊三支概念分析与模糊三支概念格在实际应用中有很大的应用价值,在文本处理、知识表达、数据挖掘及信息检索等许多应用领域中具有巨大的潜力.在实际应用中,大多数信息都是模糊的、复杂的、不确定的.传统的形式概念分析以及三支概念理论并不能有效地处理这些模糊的、复杂的、不确定的信息.本文结合形式概念分析、三支决策、模糊集合理论,对模糊三支概念格以及模糊三支概念分析进行了详细的探讨,提出几个关于模糊三支概念分析的重要定理,并给出了相关证明.下一步将对模糊概念格进行概念聚类,结合多粒度思想进行模糊三支概念分析,提出简单高效的算法构建模糊三支概念格.相信模糊三支概念分析理论将在粒计算、人工智能、机器学习等领域得到越来越广泛的应用.

参考文献

[1] 刘盾,李天瑞,李华雄.粗糙集理论:基于三支决策视角.南京大学学报(自然科学),2013,49(5):574－581.(Liu D,Li T R,Li H X. Rough set theory:a three-way decisions perspective. Journal of Nanjing University (Natural Sciences),2013,49(5):574－581.)

[2] 刘盾,梁德翠.广义三支决策与狭义三支决策.计算机科学与探索,2017,11(3):502－510.(Liu D, Liang D C. Generalized three-way decisions and special three-way decisions. Computer Science and Exploration,2017,11(3):502－510.)

[3] Yao Y Y. Granular computing and sequential three-way decisions//Lingras P,Wolski M,Cornelis C, et al. Rough Sets and Knowledge Technology. Springer Berlin Heidelberg,2013:16－27.

[4] Zhang Q H,Lv G X,Chen Y H,et al. A dynamic three-way decision model based on the updating of attribute values. Knowledge-Based Systems, 2017,142:71－84.

[5] Ma X A, Yao Y Y. Three-way decision perspectives on class-specific attribute reducts. Information Sciences,2018,450:227－245.

[6] Ganter B, Wille R. Formal concept analysis: mathematical foundations. New York: Springer-Verlag,1999:12－43.

[7] Priss U. Formal concept analysis in information science. Annual Review of Information Science and Technology,2006,40(1):521－543.

[8] 张云中,柳迪,张原铭.基于形式概念分析的知识发现研究态势.情报科学,2018,36(9):155－160.(Zhang Y Z,Liu D,Zhang Y M. Research trend of knowledge discovery based on formal concept analysis. Information Science, 2018, 36(9): 155－160.)

[9] 曲开社,翟岩慧,梁吉业等.形式概念分析对粗糙集理论的表示及扩展.软件学报,2007,18(9):2174－2182.(Qu K S,Zhai Y H,Liang J Y,et al. Representation and extension of rough set theory based on formal concept analysis . Journal of Software,2007,18(9):2174－2182.)

[10] 汪文威,祁建军.三支概念的构建算法.西安电子科技大学学报,2017,44(1):71－76.(Wang W W, Qi J J. Algorithm for constructing three-way concepts. Journal of Xidian University, 2017, 44(1):71－76.)

[11] Wang W,Qi J J. Algorithm for constructing three-way concept. Journal of Xidian University, 2017, 44(1):71－76.

[12] Qi J J,Wei L,Yao Y. Three-way formal concept analysis//International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Springer Berlin Heidelberg,2014:732－741.

[13] 李金海,邓硕.概念格与三支决策及其研究展望.西北大学学报(自然科学版),2017,47(3):321－329.(Li J H,Deng S. Concept lattice,three-way decisions and their research outlooks. Journal of Northwest University (Natural Science Edition), 2017,47(3):321－329.)

[14] Yao Y Y. Interval sets and three-way concept analysis in incomplete contexts. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2017,8(1):3－20.

[15] He X L, Ling W, She Y H. L-fuzzy concept analysis for three-way decisions: basic definitions and fuzzy inference mechanisms. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2018,9(11):1857－1867.

[16] Zadeh L A. Fuzzy logic and approximate reasoning. Synthese,1975,30(3－4):407－428.

[17] Juandeaburre A B, Fuentes-González R. The study of the L-fuzzy concept lattice. Mathware & Soft Computing,1970,1(3): 209－218.

[18] 胡明涵,张俐,任飞亮.模糊形式概念分析与模糊概念格.东北大学学报(自然科学版),2007,28(9):1274－1277.(Hu M H,Zhang L,Ren F L. Fuzzy formal concept analysis and fuzzy concept lattice. Journal of Northeastern University (Natural Science),2007,28(9):1274－1277.)

[19] 刘宗田,强宇,周文等.一种模糊概念格模型及其渐进式构造算法.计算机学报,2007,30(2):184－188.(Liu Z T,Qiang Y,Zhou W,et al. A fuzzy concept lattice model and its incremental construction algorithm. Chinese Journal of Computers,2007,30(2):184－188.)

[20] Ganter B, Wille R. Formal concept analysis: mathematical foundations. New York: Springer-Verlag,1999,284.

(责任编辑　杨可盛)